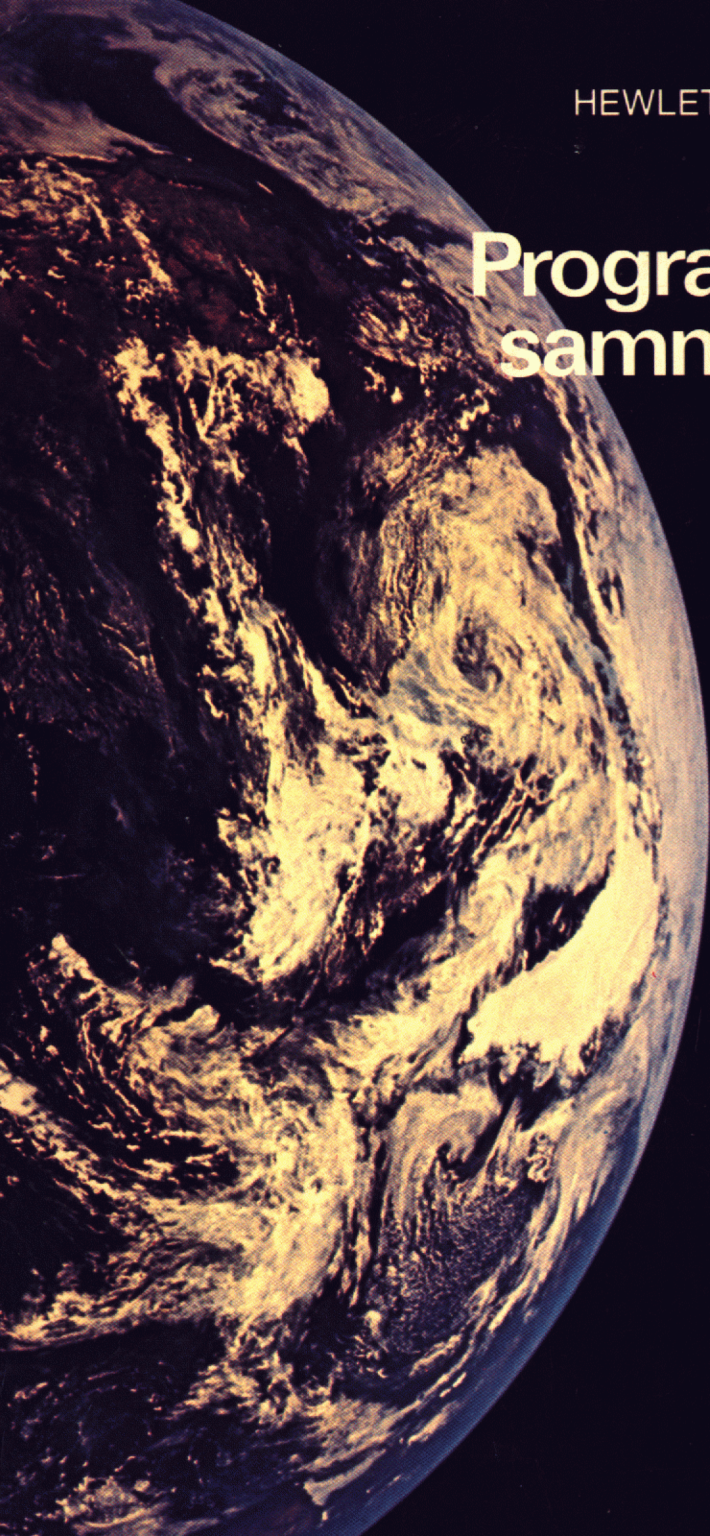
HEWLETT-PACKARD

HP-25

Programmsammlung



HEWLETT-PACKARD

HP-25

Programm-sammlung

EINLEITUNG

Mit dem HP-25 haben Sie heute Möglichkeiten «in» Ihrer Hand, die noch vor rund zehn Jahren nur den Benutzern großer Computersysteme geboten wurden, die viele Hunderttausend Mark kosten. Selbst vor noch etwa fünf Jahren wären für die Lösung der Aufgaben, die Sie heute mit einem Rechner von einigen Hundert Gramm beherrschen, große Tischrechner im Wert von vielen Tausend Mark erforderlich gewesen. Die herausragendste Eigenschaft elektronischer Computer, die freie Programmierbarkeit, steht in Form des HP-25 heute jedem Interessierten zur Verfügung. Wir hoffen, daß diese Programmsammlung einen Beitrag dazu liefert, alle in diesem programmierbaren Taschenrechner steckenden Möglichkeiten zu nutzen.

Die Programme in diesem Buch sind den Bereichen Mathematik, Statistik, Finanzwesen, Vermessungswesen, Navigation und Spiele entnommen. Entsprechend sind sie in dieser Programmsammlung in acht Abschnitten aufgeführt, die sich in etwa mit den genannten Gebieten decken.

Jedes Programm ist ausführlich beschrieben. Dazu gehört die Angabe der zur Lösung des Problems erforderlichen Formeln ebenso wie ein Zahlenbeispiel zu jeder Aufgabe. Wenn das Programm besondere Techniken irgendeiner Art verwendet, ist dies unter «Anmerkungen zum Programm» gesondert aufgeführt. In Tabellenform sind die in den Rechner einzutastenden Programmschritte (mit Tastenbezeichnung und Code) sowie die Bedienungsanweisungen aufgeführt. Außerdem ist angegeben, welche der Register das Programm mit Daten belegt und welche noch frei sind.

Je nach Ihrem Interesse an der Programmierung können Sie einzelne der Programme anhand der Speicherlisten* genauer studieren und dabei Erfahrungen für die Erstellung eigener spezieller Programme sammeln. Aber auch wenn Sie lediglich einige der hier aufgeführten Programme für Ihre Zwecke verwenden, wird dieses Buch ein Beitrag dazu sein, den größten Nutzen aus Ihrem HP-25 zu ziehen.

* Aus technischen Gründen konnten diese Listen nur teilweise übersetzt in dieses Handbuch übernommen werden.

INHALTSVERZEICHNIS

Abschnitt 5. Numerische Lösungsmethoden

Abschnitt 6. Statistik

Abschnitt 7. Vermessung

Abschnitt 8. Trigonometrie und analytische Geometrie

AUFBAU DER BEDIENUNGSANWEISUNGEN

Nachfolgend sehen Sie ein Beispiel einer Bedienungsanweisung.

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG	f	PRGM	
3	Geben Sie für i=1, 2, . . . , n	x_i	↑				
	je einen x- und y-Wert ein	y_i	R/S				i
4	Zeigen Sie c an und		GTO	0	9	R/S	(c)
	berechnen Sie A.						A
5	Für eine neue Rechnung,						
	gehen Sie nach 2.						

Befolgen Sie die Bedienungsanweisungen, indem Sie die Zeilen, mit Zeile 1 beginnend, von links nach rechts lesen und die Ihnen gegebenen Anweisungen ausführen.

Die erste Anweisung lautet meist «Programm eintasten». Damit ist gemeint, daß Sie die Folge der Programmschritte in den Programmspeicher des HP-25 eingeben sollen. (Schalten Sie in Stellung PRGM, drücken Sie [f] [PRGM], tasten Sie die Programmschritte ein und schalten Sie zurück in Stellung RUN.)

Wiederholte Vorgänge, wie die Zeile 3 im vorstehenden Beispiel, sind in den Bedienungsanweisungen stark umrandet. Meist geht es dabei um die Eingabe einer ganzen Reihe von Ausgangsdaten. Die «Laufvariable» i nimmt dabei bei jedem Durchlaufen der Schleife einen um Eins höheren Wert an.

In der Spalte «Werte» sind die Daten, gegebenenfalls auch ihre Einheiten, genannt, die im Zusammenhang mit dieser Anweisung einzugeben sind.

Die Spalte «Anzeige» führt End- und Zwischenergebnisse auf. Falls, wie in Zeile 4 des Beispiels, der Wert in einer Klammer steht, so heißt das, daß er nur kurzzeitig angezeigt wird (Funktion [f] [PAUSE]).

In der Spalte «Tasten» sind alle Tasten aufgeführt, die Sie im Zusammenhang mit diesem Schritt der Bedienungsanweisung drücken müssen. Die Taste [ENTER↑] ist oft als [↑] abgekürzt; alle übrigen Tastenbezeichnungen entsprechen denen auf dem Tastenfeld des Rechners.

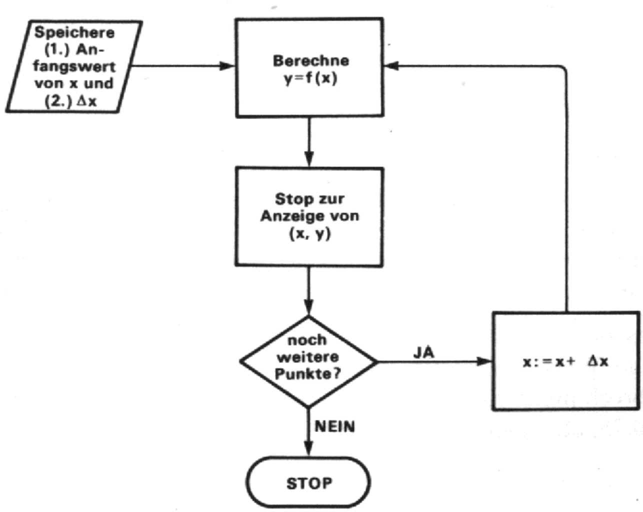
Bisweilen sind die Probleme so komplex, daß sie neben den Operationen, die das Programm ausführt, noch weitere Rechenschritte erfordern, bevor das Resultat erreicht ist. Die dazu noch zu drückenden Tasten sind dann ebenfalls in der Spalte «Tasten» der Bedienungsanweisung aufgeführt.

ABSCHNITT 1: ALGEBRA UND ZAHLENTHEORIE

1. GRAPHISCHE DARSTELLUNG EINER FUNKTION

Die meisten Menschen, die sich während der Schulzeit im Mathematikunterricht mit «Kurvendiskussionen» beschäftigen mußten, reagieren auf das Wort «Graph» mit einem ablehnenden Schaudern. Offensichtlich ist die qualvolle Mühe fest in Erinnerung geblieben, die Funktionswerte von $y=3x^2-4x+4$ für ganzzahlige Werte x von $-\infty$ bis $+\infty$ zu berechnen. Diese «Strafarbeit» hat ab heute ein Ende. Ihr HP-25 eignet sich nämlich hervorragend zur Übernahme solcher Aufgaben, die aus immer wiederkehrenden Rechenschritten bestehen.

Sie können einfach die zur Berechnung von y notwendige Tastenfolge in den Programmspeicher eingeben, einen x-Wert eintasten und die Berechnung des Funktionswertes dem Rechner überlassen. Dazu genügt es, an den Speicheranfang zurückzugehen, den Wert für x einzugeben und $\boxed{\text{R/S}}$ zu drücken; das Resultat $y=f(x)$ wird Ihnen innerhalb von Sekunden angezeigt. Diesen Vorgang können Sie dann für beliebig viele x-Werte wiederholen. Sie können aber auch einen Schritt weiter gehen und dem Rechner sogar die Erzeugung des nächsten x-Wertes selbst überlassen, indem dieser den alten x-Wert um einen bestimmten konstanten Betrag erhöht. Nachstehend sehen Sie ein «Flußdiagramm» zu diesem Prozeß:



Das hier verwendete Programm dient zur Veranschaulichung dieses Vorgangs und hat eine etwas andere Aufgabe. Wir wollen hier das Problem behandeln, die Flugbahn eines im Winkel θ zur Horizontalen mit der Geschwindigkeit v hochgeschleuderten Steines zu berechnen. Wenn man einmal von der Verzögerung durch Luftreibung absieht, können die nachstehenden Formeln verwendet werden, um die x- und y-Koordinaten des Steines in Abhängigkeit von der Zeit t zu berechnen:

$x = v t \cos\theta$
$y = v t \sin\theta - g t^2/2$

wobei

x = horizontaler Abstand des Steines von der Abschußstelle
y = Höhe des Steines
g = Erdbeschleunigung (ca. 9,81 m/s²)

Diese Funktionen weichen insoweit von der üblichen Form ab, als hier sowohl x als auch y als Funktion einer weiteren Variablen, der Zeit t ausgedrückt sind. Die für die Zeichnung der Flugbahn (Graph der Funktion) benötigten Punkte sind nach wie vor die Punkte (x, y); nur muß jetzt von Punkt zu Punkt die Zeit t um einen kleinen Betrag Δt erhöht werden.

Anmerkungen:

1. Es können beliebige zueinander passende Einheiten verwendet werden. So können Sie beispielsweise die Horizontalentfernung und die Höhe des Steines in Fuß berechnen, wenn Sie für g (Erdbeschleunigung) den entsprechenden Wert (ca. 32 ft/s²) einsetzen.
2. Dies ist *kein* allgemeines Programm zum Zeichnen des Graphen einer Funktion; es soll nur verdeutlichen, wie man die genannte Methode auf ein spezielles Problem anwendet. Wenn Sie sich die der Programmschritte und das Flußdiagramm ansehen, sollten Sie dieses Verfahren auch ohne Schwierigkeiten auf Ihre eigenen Aufgaben anwenden können.

Anmerkungen:

1. Die horizontale und vertikale Komponente der Geschwindigkeit, v_x und v_y, werden durch eine Umwandlung von v und θ in rechtwinklige Koordinaten in einem Arbeitsgang berechnet. Die entsprechenden Werte ($v_x = v\cos\theta$ und $v_y = v\sin\theta$) stehen dann im X- bzw. Y-Register.
2. In diesem Programm wird der Pausenbefehl ($\boxed{f}$ $\boxed{\text{PAUSE}}$) auf eine typische Weise eingesetzt. Während der automatischen Programmunterbrechung wird kurz die Variable t angezeigt, deren Werte (0.25, 0.50, 0.75, etc.) nicht notiert werden müssen.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
00			v	θ			
01	14 09	f →R	v_x	v_y			Use polar-to-rectangular for
02	23 02	STO 2	v_x	v_y			$v_x = v \cos \theta$ = horiz. vel.
03	21	x⇄y	v_y	v_x			
04	23 03	STO 3	v_y	v_x			$v_y = v \sin \theta$ = vert. vel.
05	00	0	0				
06	23 04	STO 4	0				Initialize: t = 0
07	24 00	RCL 0	Δt				Start of loop
08	23 51 04	STO + 4	Δt				Next time interval:
09	24 04	RCL 4	t				$t \leftarrow t + \Delta t$
10	15 02	g x^2	t^2				
11	24 01	RCL 1	g	t^2			
12	61	×	$g\,t^2$				
13	02	2	2	$g\,t^2$			
14	71	÷	$1/2\,g\,t^2$				
15	32	CHS	$-1/2\,g\,t^2$				
16	24 04	RCL 4	t	$-1/2\,g\,t^2$			
17	24 03	RCL 3	v_y	t	$-1/2\,g\,t^2$		
18	61	×	$v_y\,t$	$-1/2\,g\,t^2$			
19	51	+	y				$y = v_y\,t - 1/2\,g\,t^2$
20	24 04	RCL 4	t	y			
21	24 02	RCL 2	v_x	t	y		
22	61	×	x	y			$x = v_x\,t$
23	24 04	RCL 4	t	x	y		
24	14 74	f PAUSE	t	x	y		Pause to display t
25	22	R↓	x	y		t	
26	74	R/S	x	y		t	Halt and display x
27	21	x⇄y	y	x		t	
28	74	R/S	y	x		t	Halt and display y
29	13 07	GTO 07	y	x		t	Branch back for next t
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTERS	
R_0	Δt
R_1	g
R_2	v_x
R_3	v_y
R_4	t
R_5	
R_6	
R_7	

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Zeitintervall speichern	Δt	STO	0			
3	Gravitationskonstante speichern	g	STO	1			
4	Winkel und Anfangs-	θ	↑				
	geschwindigkeit eingeben	v	f	PRGM			
5	Führen Sie Schritt 5 und 6 beliebig oft aus. Zeigen Sie						
	Zeit und Horizontal-entfernung an		R/S				(t)
							x
6	Berechnen Sie die Höhe		R/S				y
7	Für neue Werte θ oder V, gehen						
	Sie nach 4. Zum Ändern von						
	Δt oder g, gehen Sie zum entsprechenden Schritt, spei-						
	chern Sie den Wert und gehen Sie dann nach 4.						

Beispiel:

Zeichnen Sie die Flugbahn eines Steines, der unter einem Winkel von 30° zur Horizontalen mit der Anfangsgeschwindigkeit 20 m/s fortgeschleudert wird. Zeichnen Sie Einzelpunkte im zeitlichen Abstand von ¼ Sekunde. Für die Erdbeschleunigung ist der Wert $g = 9.8\ m/s^2$ (gerundet) zu verwenden.

Lösung:

0.25 STO 0 9.8 STO 1 30 ↑ 20 f PRGM R/S → 0.25 (t_1)

4.33 (x_i)

R/S → 2.19 (y_1)

R/S → 0.5 (t_2)

8.66 (x_2)

R/S → 3.78 (y_2)

R/S → 0.75 (t_3)

12.99 (x_3)

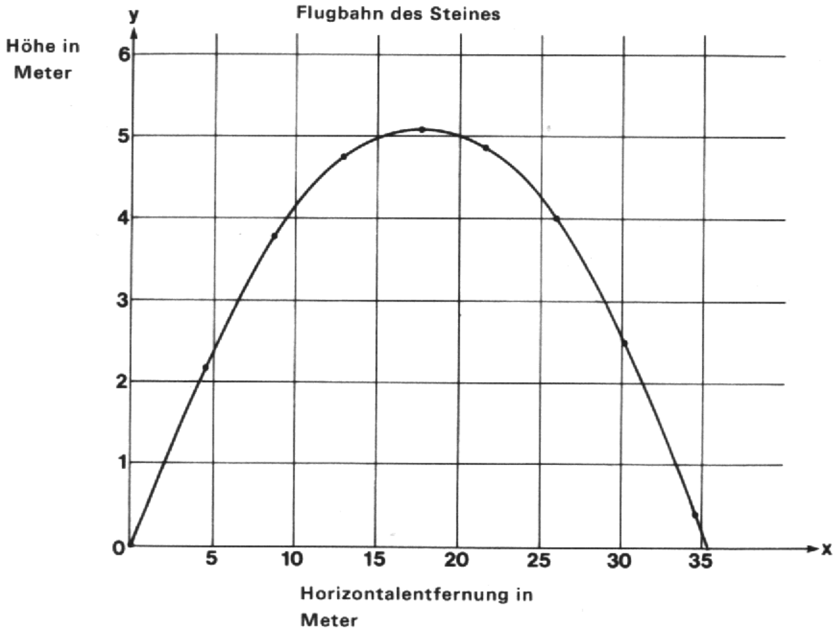
R/S → 4.74 (y_3)

Brechen Sie dieses Verfahren ab, wenn y negativ wird.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse aufgelistet:

t	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
x	4.33	8.66	12.99	17.32	21.65	25.98	30.31	34.64	38.97
y	2.19	3.78	4.74	5.10	4.84	3.98	2.49	0.40	–2.31

Wenn Sie jetzt diese einzelnen Punkte auf einem Blatt Millimeterpapier auftragen, erhalten Sie die Flugbahn des Steines; Sie werden erkennen, daß es sich dabei um eine Parabel (Wurfparabel) handelt.



2. QUADRATISCHE GLEICHUNG

Die Lösungen x_1, x_2 der Gleichung $ax^2+bx+c=0$

lauten

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In manchen Fällen können Sie ein genaueres Ergebnis erhalten, wenn Sie zuerst die Lösung mit dem größeren Absolutbetrag nach folgender Formel berechnen:

$$x_1 = \frac{-ab}{|ab|}\left(\left|\frac{b}{2a}\right| + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)$$

Die zweite (absolut kleinere) Lösung berechnet sich dann nach:

$$x_2 = \frac{c}{x_1\ a} .$$

Falls die Diskriminante

$D=(b^2-4ac)/4a^2$

positiv oder gleich Null ist, sind die Lösungen reell. Anderenfalls sind sie komplex und haben die Form:

$$u \pm iv = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i$$

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	31	↑
02	22	R↓
03	71	÷
04	02	2
05	71	÷
06	32	CHS
07	31	↑
08	15 02	g x^2
09	22	R↓
10	22	R↓
11	21	x⇄y
12	71	÷
13	23 00	STO 0
14	41	−
15	14 74	f PAUSE
16	15 41	g x<0
17	13 31	GTO 31
18	14 02	f $\sqrt{x}$
19	21	x⇄y
20	15 41	g x<0
21	13 24	GTO 24
22	51	+
23	13 26	GTO 26
24	21	x⇄y

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	41	−
26	74	R/S
27	15 22	g 1/x
28	24 00	RCL 0
29	61	x
30	13 00	GTO 00
31	32	CHS
32	14 02	f $\sqrt{x}$
33	21	x⇄y
34	74	R/S
35	21	x⇄y
36	13 00	GTO 00
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 c/a
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

Berechnen Sie die Lösungen zu den drei nachstehenden Gleichungen:

1. $x^2+x-6=0$
2. $3x^2+2x-1=0$
3. $2x^2-3x+5=0$

Lösungen:

1. $D=6.25$
   $x_1=-3.00$
   $x_2=2.00$
2. $D=0.44$
   $x_1=-1.00$
   $x_2=0.33$
3. $D=-1.94$ (d.h. Lösungen sind komplex)
   $x_1 = 0.75+1.39i$
   $x_2 = 0.75-1.39i$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Koeffizienten speichern		f	PRGM			
3	Starten Sie die Berechnung	c	↑				
	und zeigen Sie kurzfristig D an	b	↑				
		a	R/S				(D)
4	Falls $D \geqslant 0$ sind die						x_1
	Lösungen reell		R/S				x_2
	oder						
	falls $D<0$, haben die						
	Lösungen die Form $u \pm iv$						u
	Gehen Sie für eine neue		R/S				v
5	Rechnung nach 2.						

3. KOMPLEXE ARITHMETISCHE OPERATIONEN +, –, ×, ÷

a_1+ib_1 und a_2+ib_2 seien zwei komplexe Zahlen; dann sind die arithmetischen Operationen +, ×, –, ÷ wie folgt definiert:

1. +, Addition: $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$
2. –, Subtraktion: $(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$
3. ×, Multiplikation: $(a_1+ib_1)\times(a_2+ib_2)=r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
4. ÷, Division: $\dfrac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},\ a_2+ib_2\neq 0$

wobei $r_1 e^{i\theta_1}$ und $r_2 e^{i\theta_2}$ die jeweiligen polaren Darstellungen der komplexen Zahlen a_1+ib_1 bzw. a_2+ib_2 sind. Die Ergebnisse haben stets die Form $x+iy$.

Nach jeder Rechnung wird x sowohl in R_0 als auch in X gespeichert und y in R_1 und Y. Auf diese Weise können Sie auch mit komplexen Werten Kettenrechnungen durchführen.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	32	CHS
02	21	x⇄y
03	32	CHS
04	21	x⇄y
05	24 00	RCL 0
06	51	+
07	21	x⇄y
08	24 01	RCL 1
09	51	+
10	13 31	GTO 31
11	15 09	g →P
12	15 22	g 1/x
13	21	x⇄y
14	32	CHS
15	21	x⇄y
16	13 18	GTO 18
17	15 09	g →P
18	23 02	STO 2
19	22	R↓
20	24 01	RCL 1
21	24 00	RCL 0
22	15 09	g →P
23	24 02	RCL 2
24	61	x

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	23 02	STO 2
26	22	R↓
27	51	+
28	24 02	RCL 2
29	14 09	f →R
30	21	x⇄y
31	23 01	STO 1
32	21	x⇄y
33	23 00	STO 0
34	13 00	GTO 00
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 a_1, x
R_1 b_1, y
R_2 belegt
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. $(1.2+3.7i)-(2.6-1.9i)=-1.4+5.6i$

2. $\dfrac{3+4i}{7-2i}=0.25+0.64i$

3. $\left[\dfrac{(3+4i)+(7.4-5.6i)}{(7-2i)}\right][3.1+4.6i]=3.61+7.16i$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Erste komplexe Zahl	b_1	STO	1			
	speichern	a_1	STO	0			
3	Tasten Sie die zweite	b_2	↑				
	Zahl ein.	a_2					
4	Für Addition		GTO	05	R/S		z
	oder						
	Subtraktion		f	PRGM	R/S		z
	oder						
	Multiplikation		GTO	17	R/S		z
	oder						
	Division		GTO	11	R/S		z
5	Für den Imaginärteil		x⇄y				y
6	Für die nächste Rechnung						
	innerhalb einer Kettenaufgabe, gehen Sie nach 3.						
7	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

4. KOMPLEXE FUNKTIONEN $|z|$, z^2, $1/z$, $\sqrt{z}$

Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ kann auch in Exponentialform als $r e^{i\theta}$ (polare Darstellung) ausgedrückt werden. Die verschiedenen Funktionen berechnen sich nach folgenden Formeln:

1. $|z| = r$

2. $z^2 = r^2\ e^{i2\theta}$

3. $^1/z = \dfrac{1}{r}\ e^{-i\theta},\ z \neq 0$

4. $\sqrt{z} = \pm\,(\sqrt{r}\ \ e^{i\theta/2}) = \pm\,(x + iy)$

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	15 09	g →P
02	13 00	GTO 00
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	21	x⇄y
06	31	↑
07	51	+
08	21	x⇄y
09	14 09	f →R
10	13 00	GTO 00
11	15 09	g →P
12	15 22	g 1/x
13	21	x⇄y
14	32	CHS
15	21	x⇄y
16	14 09	f →R
17	13 00	GTO 00
18	15 09	g →P
19	14 02	f $\sqrt{x}$
20	21	x⇄y
21	02	2
22	71	÷
23	21	x⇄y
24	14 09	f →R

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	13 00	GTO 00
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. $|12-5i| = 13.00$
2. $(6-i)^2 = 35.00 - 12.00i$
3. $\frac{1}{2+5i} = 0.07 - 0.17i$
4. $\sqrt{3+4i} = \pm(2.00 + 1.00i)$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	z eingeben	b	↑				
		a					
3	Für $\lvert z\rvert$		f	PRGM	R/S		$\lvert z\rvert$
	oder						
	z^2		GTO	03	R/S		x
	oder		x⇄y				y
	1/z		GTO	11	R/S		x
	oder		x⇄y				y
	$\sqrt{z}$		GTO	18	R/S		x
			x⇄y				y
4	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

5. DETERMINANTE UND INVERSE EINER 2×2 MATRIX

Gegeben ist die 2 × 2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Die Determinante von A wird mit Det A oder |A| bezeichnet und nach der folgenden Formel berechnet:

$$\text{Det } A = a_{22}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21}$$

Das Programm berechnet weiter die Inverse A^{-1} zur Matrix A. Die einzelnen Glieder der invertierten Matrix berechnen sich wie folgt:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/\text{Det } A & -a_{12}/\text{Det } A \\ -a_{21}/\text{Det } A & a_{11}/\text{Det } A \end{bmatrix}$$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 04	RCL 4
02	24 01	RCL 1
03	61	x
04	24 02	RCL 2
05	24 03	RCL 3
06	61	x
07	41	–
08	23 00	STO 0
09	74	R/S
10	24 04	RCL 4
11	24 00	RCL 0
12	71	÷
13	74	R/S
14	24 02	RCL 2
15	24 00	RCL 0
16	71	÷
17	32	CHS
18	74	R/S
19	24 03	RCL 3
20	24 00	RCL 0
21	71	÷
22	32	CHS
23	74	R/S
24	24 01	RCL 1

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	24 00	RCL 0
26	71	÷
27	13 00	GTO 00
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 Det A
R_1 a_{11}
R_2 a_{12}
R_3 a_{21}
R_4 a_{22}
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Berechnen Sie die Determinante und die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Lösung:

Det A = –20

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.10 \\ 0.20 & -0.15 \end{bmatrix}$$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Matrix speichern	a_{11}	STO	1			
		a_{12}	STO	2			
		a_{21}	STO	3			
		a_{22}	STO	4			
3	Determinante berechnen		f	PRGM	R/S		Det A
4	Inverse berechnen		R/S				a_{11}^{-1}
			R/S				a_{12}^{-1}
			R/S				a_{21}^{-1}
			R/S				a_{22}^{-1}
5	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

6. BASISTRANSFORMATION (ZAHL ZUR BASIS b → DEZIMALZAHL)

Dieses Programm setzt sich aus zwei Unterprogrammen zusammen. Das erste wandelt den ganzzahligen Teil der zur Basis b gegebenen Zahl in eine entsprechende (dezimale) Zahl zur Basis 10 um.

$I_{10} = i_n i_{n-1} \ldots i_2 i_1 = i_n b^{n-1} + i_{n-1} b^{n-2} + \ldots + i_2 b + i_1$

Dieser Ausdruck wird in der folgenden Form berechnet:

$b(\ldots(b(b(i_n b + i_{n-1}) + i_{n-2}) + \ldots) + i_2) + i_1$

Das zweite Unterprogramm wandelt den Nachkommateil der zur Basis b gegebenen Zahl in die entsprechende dezimale Form um.

$F_{10} = f_1 f_2 \ldots f_m = f_1 b^{-1} + f_2 b^{-2} + \ldots + f_m b^{-m}$

Diese beiden Unterprogramme können so jede beliebige zur Basis b gegebene Zahl in eine Zahl zur Basis 10 (Dezimale Zahl) umwandeln. Bei der Eingabe sind Nullen an den entsprechenden Stellen mit einzugeben.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	23 01	STO 1
02	24 00	RCL 0
03	31	↑
04	31	↑
05	31	↑
06	24 01	RCL 1
07	74	R/S
08	23 01	STO 1
09	34	CLX
10	51	+
11	61	x
12	24 01	RCL 1
13	51	+
14	13 07	GTO 07
15	24 00	RCL 0
16	15 22	g 1/x
17	23 02	STO 2
18	23 03	STO 3
19	61	x
20	74	R/S
21	24 02	RCL 2
22	24 03	RCL 3
23	61	x
24	23 03	STO 3

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	61	x
26	51	+
27	13 20	GTO 20
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 b
R_1 belegt
R_2 b^{-1}
R_3 b^{-j}
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. $1777_8 = 1023_{10}$
2. $143.2044_5 = 48.4384_{10}$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Basis speichern	b	STO	0			
3	Für den ganzzahligen Anteil,						
	geben Sie äußerste linke Ziffer ein.	i_n	f	PRGM	R/S		
4	Führen Sie 4 aus für $j=n-1, \ldots, 2$						
	geben Sie die nächste Ziffer ein	i_j*	R/S				
5	Geben Sie die letzte Ziffer ein	i_1*	R/S				I_{10}
6	Für den Nachkommateil,						
	geben Sie die Ziffer nach dem Dezimalpunkt ein	f_1	GTO	15	R/S		
7	Führen Sie 7 aus für $j=2, \ldots, m-1$						
	Geben Sie die nächste Ziffer ein	f_j*	R/S				
8	Geben Sie die letzte Ziffer ein	f_m*	R/S				F_{10}
9	Für eine neue Rechnung,						
	gehen Sie nach 2.						
	(*An diesen Stellen darf der						
	Stack nicht verschoben werden)						

7. BASISTRANSFORMATION (DEZIMALZAHL → ZAHL ZUR BASIS b)

Dieses Programm wandelt jede zur Basis 10 gegebene Zahl N_{10} (dezimale Form) in eine entsprechende Zahl zur Basis b um. Die zur Basis 10 gegebene Zahl muß positiv sein. Die Basis b muß innerhalb des folgenden Bereichs liegen: $2 \leqslant b \leqslant 100$. Für die Rechnung wird eine Iteration verwendet, die bei jedem Durchlauf eine Ziffer zu N_b (der Zahl zur Basis b) hinzufügt. Das Programm hält bei jedem Iterationsschritt kurzzeitig an (PAUSE) und zeigt an, wie sich das jeweilige Resultat dem Endergebnis annähert. Wenn der angezeigte Wert für N_b die vom Benutzer gewünschte Genauigkeit erreicht hat, kann das Programm mit R/S angehalten und der Wert für N_b mit RCL 3 angezeigt werden.

Anmerkungen:

1. Wenn die Basis b innerhalb der Grenzen $11 \leqslant b \leqslant 100$ liegt, werden jeder Ziffer von N_b zwei Stellen der Anzeige zugeordnet. Diese Aufteilung erfolgt vom Dezimalpunkt ausgehend nach rechts und links. So wird z. B. die Hexadezimalzahl (Basis 16) 4B6.C als 41106.12 angezeigt.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 00	RCL 0
02	01	1
03	00	0
04	14 51	f x≥y
05	13 09	GTO 09
06	01	1
07	00	0
08	00	0
09	23 02	STO 2
10	00	0
11	23 03	STO 3
12	24 01	RCL 1
13	14 07	f LN
14	24 00	RCL 0
15	14 07	f LN
16	71	÷
17	15 41	g x<0
18	13 21	GTO 21
19	14 01	f INT
20	13 24	GTO 24
21	14 01	f INT
22	01	1
23	41	−
24	23 04	STO 4

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	24 02	RCL 2
26	21	x⇄y
27	14 03	f y^x
28	24 03	RCL 3
29	51	+
30	23 03	STO 3
31	14 74	f PAUSE
32	14 74	f PAUSE
33	24 00	RCL 0
34	24 04	RCL 4
35	14 03	f y^x
36	23 41 01	STO − 1
37	13 12	GTO 12
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 b
R_1 N_{10}
R_2 10 oder 100
R_3 N_b
R_4 1 Ziffer
R_5
R_6
R_7

2. Eine Fehlermeldung während der Rechnung zeigt an, daß die Genauigkeitsgrenzen des Rechners erreicht sind. N_b ist dann aus Register R_3 abzurufen.

Beispiele:

1. $67.32_{10} = 403.050114_{16}$
   $= 43.51E_{16}$

2. $\pi = 3.141592654_{10} = 11.00100100_2$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Anzeigeformat wählen		f	FIX	9		
3	Basis und Dezimalzahl	b	STO	0			
	speichern	N_{10}	STO	1	f	PRGM	
4	Anzeige laufender Näherungs-						
	werte an N_b		R/S				(N_b)
5	Wenn die Zahl mit gewünsch-						
	ter Genauigkeit angezeigt						
	wird, drücken Sie R/S und dann RCL 3		RCL	3			N_b
6	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 3.						

8. VEKTORPRODUKT (ÄUSSERES ODER KREUZPRODUKT)

Wenn $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ zwei dreidimensionale Vektoren darstellen, wird das äußere oder Kreuzprodukt von A und B mit $A \times B$ bezeichnet und wie folgt berechnet:

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Das Ergebnis hat die Form (c_1, c_2, c_3).

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 02	RCL 2
02	24 06	RCL 6
03	61	x
04	24 03	RCL 3
05	24 05	RCL 5
06	61	x
07	41	–
08	74	R/S
09	24 03	RCL 3
10	24 04	RCL 4
11	61	x
12	24 01	RCL 1
13	24 06	RCL 6
14	61	x
15	41	–
16	74	R/S
17	24 01	RCL 1
18	24 05	RCL 5
19	61	x
20	24 02	RCL 2
21	24 04	RCL 4
22	61	x
23	41	–
24	13 00	GTO 00

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 a_1
R_2 a_2
R_3 a_3
R_4 b_1
R_5 b_2
R_6 b_3
R_7

Beispiel:

Es sei A = (2, 5, 2) und B = (3, 3, –4)

Lösung:

A × B = (–26, 14, –9)

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	A speichern	a_1	STO	1			
		a_2	STO	2			
		a_3	STO	3			
3	B speichern	b_1	STO	4			
		b_2	STO	5			
		b_3	STO	6			
4	Berechnen Sie A × B		f	PRGM	R/S		c_1
			R/S				c_2
			R/S				c_3
5	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

9. WINKEL ZWISCHEN VEKTOREN, SKALARPRODUKT UND BETRAGSNORM

Gegeben sind die Vektoren $|\vec{a}| = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Dann berechnet sich die Betragsnorm $|\vec{a}$ wie folgt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2}$$

bzw.

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2}$$

Das Skalarprodukt wird mit $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bezeichnet und nach folgender Formel berechnet:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Der Winkel θ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird nach folgender Formel berechnet:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	23 51 01	STO + 1
04	22	R↓
05	21	x⇄y
06	31	↑
07	15 02	g x^2
08	23 51 00	STO + 0
09	22	R↓
10	61	x
11	23 51 02	STO + 2
12	13 00	GTO 00
13	24 02	RCL 2
14	24 00	RCL 0
15	24 01	RCL 1
16	61	x
17	14 02	f $\sqrt{x}$
18	71	÷
19	15 05	g COS^{-1}
20	13 00	GTO 00
21		
22		
23		
24		

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 Σa_i^2
R_1 Σb_i^2
R_2 $\Sigma a_i b_i$
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Der Winkel θ kann in beliebigem Winkel-Modus berechnet werden, wobei im Modus DEG berechnete Ergebnisse als dezimale Grad aufzufassen sind.

Beispiel:

Let A = (2, 5, 2)
B = (3, 3, –4).

Lösung:

$|\vec{a}| = 5.74$

$|\vec{b}| = 5.83$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 13.00$

$\theta = 67.16°$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Programm starten		f	REG	f	PRGM	
3	Führen Sie 3 aus für						
	$i=1,\ldots,n$. Geben Sie	a_i	↑				
	a_i und b_i ein	b_i	R/S				
4	Berechnen Sie $\lvert\vec{a}\rvert$		RCL	0	f	$\sqrt{x}$	$\lvert\vec{a}\rvert$
5	Berechnen Sie $\lvert\vec{b}\rvert$		RCL	1	f	$\sqrt{x}$	$\lvert\vec{b}\rvert$
6	Berechnen Sie das Skalarprodukt		RCL	2			$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert$
7	Berechnen Sie den Winkel θ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$		GTO	13	R/S		θ

10. GLEICHUNGSSYSTEME MIT 2 UNBEKANNTEN

Gegeben sind die folgenden zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$ax + by = e$
$cx + dy = f$

Die Lösungen werden nach der Cramerschen Regel gefunden:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Wenn $ad - bc = 0$, folgt eine Fehlermeldung: das Gleichungssystem ist dann nicht bzw. nicht eindeutig lösbar.

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	24 03	RCL 3
02	24 05	RCL 5
03	61	x
04	24 02	RCL 2
05	24 06	RCL 6
06	61	x
07	41	–
08	24 01	RCL 1
09	24 05	RCL 5
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	41	–
15	23 00	STO 0
16	71	÷
17	74	R/S
18	24 01	RCL 1
19	24 06	RCL 6
20	61	x
21	24 03	RCL 3
22	24 04	RCL 4
23	61	x
24	41	–

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	24 00	RCL 0
26	71	÷
27	13 00	GTO 00
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 ad – bc
R_1 a
R_2 b
R_3 e
R_4 c
R_5 d
R_6 f
R_7

Beispiel:

$5x - 3y = 12$

$2x + y = 9$

Lösung:

$x = 3.55$
$y = 1.91$

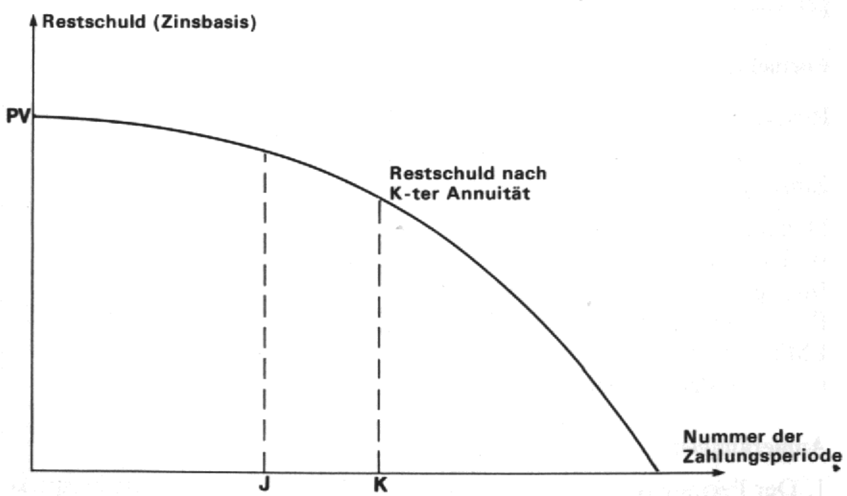
NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Konstanten speichern	a	STO	1			
		b	STO	2			
		e	STO	3			
		c	STO	4			
		d	STO	5			
		f	STO	6			
3	Berechnen Sie x und y		f	PRGM	R/S		x
			R/S				y
4	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

ABSCHNITT 2: FINANZPROGRAMME

Da im Zusammenhang mit vielen Finanzprogrammen immer wieder die gleichen Variablen auftreten, ist es sinnvoll, die Erklärung ihrer Abkürzungen an den Anfang zu stellen.

Im wesentlichen treten immer wieder die fünf Größen n, i, PMT, PV und FV auf. Die erste dieser Variablen, n, bezeichnet die Gesamtzahl der Zins- bzw. Zahlungsperioden. Der Periodenzinssatz i ist für die folgenden Programme stets als Dezimalzahl einzugeben. Ein Jahreszinssatz von 6% ist demnach als 0.06 einzutasten. Der entsprechende Monatszinssatz würde in dem Fall 6/12% bzw. 0.005 (=0.06/12) betragen. PMT bezeichnet die Höhe periodischer Ein- bzw. Auszahlungen (Sparraten, Annuitäten). Der Gegenwarts- oder Anfangswert PV ist der Betrag zu Beginn der ersten Zinsperiode, der zukünftige oder Endwert FV ist der Wert am Ende der letzten Periode.

11. PERIODISCHE DARLEHENSTILGUNG (ZINSBETRÄGE UND RESTSCHULD)



Eine wichtige finanztechnische Rechnung ist die Feststellung, welcher Anteil einer konstanten periodischen Tilgungsrate (Annuität) auf die Zinsen für den Restbetrag eines Darlehens entfällt. Dazu folgendes Beispiel:
Ein stolzer Besitzer eines neuen Eigenheims überweist die erste Rate für ein 30jähriges Darlehen über 30 000 DM in Höhe von 220,13 DM. Das über monatliche Annuitäten zu tilgende Darlehen wird mit 8% p.a.

(d.h. pro Jahr) verzinst. Nach Zahlung der ersten Rate zieht der Hausbesitzer die 220,13 DM von den 30000 DM ab und freut sich über die auf diese Weise bereits verminderte Schuld. Ist das richtig? – Nicht ganz; in Wirklichkeit entfielen bei dieser ersten Zahlung nur ganze 20,13 DM auf die Tilgung des Darlehens, der Rest, 200 DM, wurde durch die zu Beginn noch hohe Zinsbelastung abgeschöpft.

Mit Hilfe dieses Programms können Sie die während einer oder mehreren Perioden anfallenden Zinsanteile sowie die jeweilige Restschuld berechnen. Dazu müssen die folgenden Daten eingegeben werden: die anfängliche Darlehenshöhe, der Periodenzinssatz, den Sie durch Division des Jahreszinssatzes durch die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr erhalten und der Betrag, den Sie als konstante periodische Zahlung leisten müssen. Sodann sind zwei Nummern (J und K) einzugeben, die die erste und letzte Periode angeben, die das Programm noch berücksichtigen soll. Das Programm berechnet die während der Perioden J bis K einschließlich gezahlten Zinsen sowie die Restschuld am Ende der K-ten Zins- bzw. Zahlungsperiode. Falls Sie lediglich an dem Zinsanteil einer einzelnen Annuität interessiert sind, können Sie einfach J = K eingeben. Sie können mit Hilfe dieses Programms auch einen vereinfachten Tilgungsplan aufstellen, der die jeweilige Restschuld am Ende der Perioden ausweist. Dazu ist J = 1 einzugeben und K mit jeder Rechnung um eins zu erhöhen; Sie erhalten dann die jeweils bis zur K-ten Periode insgesamt geleisteten Zinszahlungen und die verbleibende Restschuld.

Formeln:

$$\text{Restschuld}_K: \text{BAL}_K = \frac{1}{(1+i)^{-K}}\left[\text{PMT}\,\frac{(1+i)^{-K}-1}{i} + \text{PV}\right]$$

$$\text{Zinsen}_{J-K}: \text{Int}_{J-K} = \text{BAL}_K - \text{BAL}_{J-1} + (K-J+1)\,\text{PMT}$$

Dabei gilt:

BAL_n = Restschuld am Ende der n-ten Zahlung.
Int_{J-K} = während der Perioden J bis K insgesamt gezahlte Zinsen.
PV = anfänglicher Darlehensbetrag.
PMT = Annuität, d.h. der periodisch zu leistende Ratenbetrag.
i = Periodenzinssatz.

Anmerkungen:

1. Der Periodenzinssatz ist als Dezimalzahl einzugeben. So ist beispielsweise im Fall monatlicher Zahlungen bei einem Jahreszinssatz von 9% p.a. für den Periodenzinssatz $\frac{.09}{12} = 0.0075$ einzugeben.

2. Sie können dieses Programm in all den Fällen verwenden, wo eine verzinsliche Schuld in Form periodischer konstanter Raten zurückgezahlt wird, die sich in einen Zins- und einen Tilgungsanteil aufspalten (Annuitäten).

Anmerkung zum Programm:

Es kommt im Zusammenhang mit den Finanzprogrammen häufig vor, daß die Ausdrücke $(1+i)$ und $(1+i)^n$ mehrmals innerhalb eines Programms benötigt werden. Meist ist es dabei sinnvoll, diesen Wert nur einmal zu berechnen und dann für die weitere Verwendung abzuspeichern. In diesem Programm werden die Werte $(1+i)^{-K}$ und $(1+i)^{-J}$ nach der Berechnung in R_7 gespeichert, womit einmal Programmschritte und auch Rechenzeit bei der Programmausführung gespart werden. Die vorgenannten Überlegungen gelten natürlich auch für andere Ausdrücke in den übrigen Programmen.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
00							
01	24 01	RCL 1	i				Calculate BAL_K
02	01	1	1	i			
03	51	+	1 + i				
04	24 05	RCL 5	K	1 + i			
05	32	CHS	–K	1 + i			
06	14 03	f y^x	$(1+i)^{-K}$				
07	23 07	STO 7	$(1+i)^{-K}$				
08	01	1	1	$(1+i)^{-K}$			
09	41	–	$(1+i)^{-K}-1$				
10	24 01	RCL 1	i	$(1+i)^{-K}-1$			
11	71	÷	s				Let $s = [(1+i)^{-K}-1] \div i$
12	24 02	RCL 2	PMT	s			
13	61	x	PMT s				
14	24 03	RCL 3	PV	PMT s			
15	51	+	PMT s + PV				
16	24 07	RCL 7	$(1+i)^{-K}$	PMT s + PV			
17	71	÷	BAL_K				
18	23 06	STO 6	BAL_K				
19	24 01	RCL 1	i	BAL_K			Calculate BAL_{J-1}
20	01	1	1	i	BAL_K		
21	51	+	(1 + i)	BAL_K			
22	24 04	RCL 4	J	(1 + i)	BAL_K		
23	01	1	1	J	(1 + i)	BAL_K	
24	41	–	J – 1	(1 + i)	BAL_K	BAL_K	
25	32	CHS	– (J – 1)	(1 + i)	BAL_K	BAL_K	
26	14 03	f y^x	$(1+i)^{-(J-1)}$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
27	23 07	STO 7	$(1+i)^{1-J}$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
28	01	1	1	$(1+i)^{1-J}$	BAL_K	BAL_K	
29	41	–	$(1+i)^{1-J}-1$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
30	24 01	RCL 1	i	$(1+i)^{1-J}-1$	BAL_K	BAL_K	
31	71	÷	s	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Let $s = [(1+i)^{1-J}-1] \div i$
32	24 02	RCL 2	PMT	s	BAL_K	BAL_K	
33	61	x	PMT s	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
34	24 03	RCL 3	PV	PMT s	BAL_K	BAL_K	
35	51	+	PMT s + PV	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
36	24 07	RCL 7	$(1+i)^{1-J}$	PMT s + PV	BAL_K	BAL_K	
37	71	÷	BAL_{J-1}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
38	41	–	Diff	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Diff = $BAL_K - BAL_{J-1}$
39	24 05	RCL.5	K	Diff	BAL_K	BAL_K	K – J + 1 gives no. PMT's
40	24 04	RCL 4	J	K	Diff	BAL_K	from J through K
41	41	–	K–J	Diff	BAL_K	BAL_K	
42	01	1	1	K–J	Diff	BAL_K	
43	51	+	K – J + 1	Diff	BAL_K	BAL_K	
44	24 02	RCL 2	PMT	m	Diff	BAL_K	m = K – J + 1
45	61	x	m PMT	Diff	BAL_K	BAL_K	m PMT is $ paid, J–K
46	51	+	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Display Int_{J-K}
47	74	R/S	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
48	21	x⇄y	BAL_K	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	Display BAL_K
49	13 00	GTO 00	BAL_K	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	

REGISTERS	
R_0	
R_1	i
R_2	PMT
R_3	PV
R_4	J
R_5	K
R_6	BAL_K
R_7	$(1+i)^{-n}$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Speichern Sie:						
	Periodenzinssatz (Dezimalzahl)	i	STO	1			
	Annuität	PMT	STO	2			
	Darlehensbetrag	PV	STO	3			
	Nummer der 1. Periode	J	STO	4			
3	Nummer der letzten Periode	K	STO	5	f	PRGM	
	Berechnen der Zinsen		R/S				$Int_{J\text{-}K}$
4	Berechnung der Restschuld						
	nach Zahlung K.		R/S				BAL_K
5	Für eine neue Rechnung,						
	speichern Sie geänderte Werte						
	und gehen Sie nach 3.						

Beispiel:

Es wird ein Darlehensvertrag über 25 000 DM zu 8% p.a. mit monatlichen Zahlungen in Höhe von 200 DM vereinbart. Die erste Rate ist Ende Oktober 1974 fällig. Wieviel Zinsen sind 1974 (Perioden 1–3) und 1975 (Perioden 4–15) zu zahlen und wie hoch ist die Restschuld zum Jahresende 74 und 75. Stellen Sie des weiteren einen Tilgungsplan auf, der die Gesamtzinsen und die Restschuld für die ersten fünf Jahre der Laufzeit aufführt (Perioden 12, 24, 36, 48, 60).

Lösung:

(Beachten Sie, daß i als Dezimalzahl einzugeben ist.)

.08 [↑] 12 [÷] [STO] [1] 200 [STO] [2] 25000 [STO] [3] 1
[STO] [4] 3 [STO] [5] [f] [PRGM] [R/S] ⟶ 499.33
(Zinsen 1974)

[R/S] ⟶ 24899.33
(Restschuld Ende 1974)

4 [STO] [4] 15 [STO] [5] [R/S] ⟶ 1976.65
(Zinsen für 1975)

[R/S] ⟶ 24475.98
(Restschuld Ende 1975)

Berechnen Sie jetzt die Daten für den Tilgungsplan:

1 STO 4 12 STO 5 R/S ⟶ 1985.00
(Zinsen im 1. Jahr)

R/S ⟶ 24585.00
(Restschuld nach 1. Jahr)

24 STO 5 R/S ⟶ 3935.56
(Zinsen bis einschließlich 2. Jahr)

R/S ⟶ 24135.56
(Restschuld nach 2. Jahr)

36 STO 5 R/S ⟶ 5848.81
(Zinsen bis einschließlich 3. Jahr)

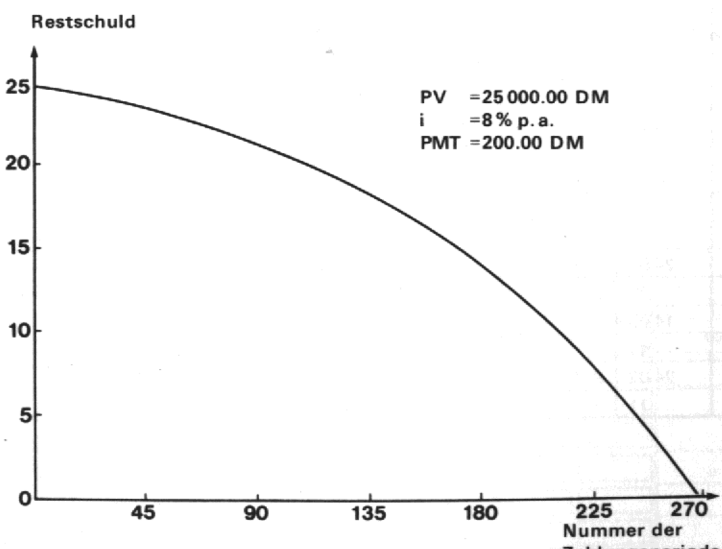
R/S ⟶ 23648.81
(Restschuld nach 3. Jahr)

48 STO 5 R/S ⟶ 7721.67
(Zinsen bis einschließlich 4. Jahr)

R/S ⟶ 23121.67
(Restschuld nach 4. Jahr)

60 STO 5 R/S ⟶ 9550.77
(Zinsen bis einschließlich 5. Jahr)

R/S ⟶ 22550.77
(Restschuld nach 5. Jahr)



12. PERIODISCHE DARLEHENSTILGUNG (ANNUITÄT ANFANGSWERT, ZAHL DER ZAHLUNGSPERIODEN)

Bei Annuitätentilgung eines Darlehens (nachschüssig) können Sie mit Hilfe dieses Programms die Höhe der Annuität, den anfänglichen Darlehensbetrag (Anfangswert) oder die Zahl der Zins- bzw. Zahlungsperioden berechnen, wenn der Periodenzinssatz und zwei der vorgenannten Größen bekannt sind.

Beachten Sie, daß der Periodenzinssatz stets als Dezimalzahl einzutasten ist (für 6% beispielsweise ist 0.06 einzugeben).

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	01	1
02	24 02	RCL 2
03	01	1
04	51	+
05	24 01	RCL 1
06	32	CHS
07	14 03	f y^x
08	41	−
09	24 02	RCL 2
10	21	x⇄y
11	71	÷
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	13 00	GTO 00
15	01	1
16	24 02	RCL 2
17	01	1
18	51	+
19	24 01	RCL 1
20	32	CHS
21	14 03	f y^x
22	41	−
23	24 02	RCL 2
24	71	÷

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	24 03	RCL 3
26	61	x
27	13 00	GTO 00
28	01	1
29	24 04	RCL 4
30	24 03	RCL 3
31	71	÷
32	24 02	RCL 2
33	61	x
34	41	−
35	14 07	f LN
36	24 02	RCL 2
37	01	1
38	51	+
39	14 07	f LN
40	71	÷
41	32	CHS
42	13 00	GTO 00
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3 PMT
R_4 PV
R_5
R_6
R_7

Das Programm verwendet die folgenden Formeln:

$$\mathrm{PMT} = \mathrm{PV}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \qquad \mathrm{PV} = \mathrm{PMT}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$n = -\frac{\ln(1 - i\,\mathrm{PV}/\mathrm{PMT})}{\ln(1+i)}$$

Beispiele:

1. Wie hoch muß der Betrag einer monatlichen Annuität sein, wenn damit innerhalb von 36 Monaten ein Darlehen über 3000 DM zu 9,5% p.a. (0.095) zurückgezahlt werden soll?
2. Sie sind bereit, zwei Jahre lang für ein Darlehen zu 9,5% p.a. monatlich 175 DM zu zahlen. Wie hoch kann der Kredit sein?
3. Wieviele Monate werden Sie brauchen, um ein Darlehen über 4000 DM zu 9,5% p.a. zurückzuzahlen, wenn Sie monatliche Zahlungen in Höhe von 200 DM zu leisten bereit sind?

Lösungen:

(Dividieren Sie 0.095 zur Berechnung des Periodenzinssatzes durch 12.)

1. 96,10 DM
2. 3811,43 DM
3. 21,86 Monate

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Für die Annuität	n	STO	1			
		i	STO	2			
		PV	STO	4			
			f	PRGM	R/S		PMT
3	Für den Darlehensbetrag	n	STO	1			
		i	STO	2			
		PMT	STO	3			
			GTO	15	R/S		PV
4	Für die Anzahl der	i	STO	2			
	Zahlungen	PMT	STO	3			
		PV	STO	4			
			GTO	28	R/S		n

13. PERIODISCHE DARLEHENSTILGUNG (PERIODENZINSSATZ)

Dieses Programm berechnet den Periodenzinssatz für ein Darlehen, das über Annuitäten getilgt wird. Als Ausgangsdaten sind die Anzahl der Zinsperioden, der Anfangswert (Darlehensbetrag) und die Annuität einzugeben.

Das Ergebnis für i wird nach einem iterativen Lösungsverfahren (Newton'sches Verfahren) berechnet:

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)}$$

wobei $f(i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{PV}{PMT}$.

Der Anfangswert für i wird wie folgt gewählt:

$$i_o = \frac{PMT}{PV} - \frac{PV}{n^2\,PMT}.$$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 03	RCL 3
02	31	↑
03	15 22	g 1/x
04	21	x⇄y
05	24 01	RCL 1
06	15 02	g x^2
07	71	÷
08	41	–
09	23 02	STO 2
10	24 03	RCL 3
11	24 02	RCL 2
12	61	x
13	01	1
14	24 02	RCL 2
15	01	1
16	51	+
17	24 01	RCL 1
18	32	CHS
19	14 03	f y^x
20	23 05	STO 5
21	41	–
22	41	–
23	24 01	RCL 1
24	24 02	RCL 2

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	15 22	g 1/x
26	01	1
27	51	+
28	71	÷
29	01	1
30	51	+
31	24 05	RCL 5
32	61	x
33	01	1
34	41	–
35	24 02	RCL 2
36	71	÷
37	71	÷
38	23 51 02	STO + 2
39	15 03	g ABS
40	33	EEX
41	06	6
42	32	CHS
43	14 41	f x<y
44	13 10	GTO 10
45	24 02	RCL 2
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3 PV/PMT
R_4 $(1+i)^{-n}$
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

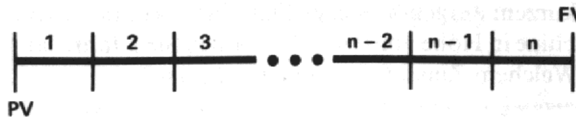
Für ein vor kurzem aufgenommenes Darlehen zwecks Anschaffung einer Küchenmaschine in Höhe von 2500 DM zahlen Sie 3 Jahre lang monatlich 86,67 DM. Welchem Zinssatz p.a. entspricht das?

Lösung:

15,01% p.a.

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten		·				
2	Zahl der Zahlungen speichern	n	STO	1			
3	Anfangsbetrag und						
	Annuität eingeben	PV	↑				
		PMT	÷	STO	3		PV/PMT
4	Zinssatz berechnen		f	PRGM	R/S		i (dezimal)
			EEX	2	x		i (%)
5	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

14. ZINSESZINS-BERECHNUNG



Dieses Programm berücksichtigt die Verzinsung einer einmaligen Einlage, d.h. es werden keine weiteren Zahlungen vorgenommen. Die Zinsen werden dem Kapital jeweils am Ende einer Zinsperiode zugerechnet. Die bei diesem Problem auftretenden Variablen sind die Zahl der Zinsperioden (n), der Periodenzinssatz (i), der gegenwärtige oder Anfangswert (PV), der zukünftige oder Endwert (FV) und der insgesamt aufgelaufene Zinsbetrag (I). Mit Hilfe der nachfolgenden Formeln kann jede dieser Größen berechnet werden, wenn die übrigen Werte gegeben sind:

$$n = \frac{\ln (FV/PV)}{\ln (1 + i)} \qquad i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{1/n} - 1 \qquad PV = FV\,(1 + i)^{-n}$$

$$FV = PV\,(1 + i)^{n} \qquad I = PV\,[(1 + i)^{n} - 1]$$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 05	RCL 5
02	24 04	RCL 4
03	71	÷
04	14 07	f LN
05	24 02	RCL 2
06	01	1
07	51	+
08	14 07	f LN
09	71	÷
10	13 00	GTO 00
11	24 05	RCL 5
12	24 04	RCL 4
13	71	÷
14	24 01	RCL 1
15	15 22	g 1/x
16	14 03	f y^x
17	01	1
18	41	–
19	13 00	GTO 00
20	24 02	RCL 2
21	01	1
22	51	+
23	24 01	RCL 1
24	32	CHS

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	14 03	f y^x
26	24 05	RCL 5
27	61	x
28	13 00	GTO 00
29	24 02	RCL 2
30	01	1
31	51	+
32	24 01	RCL 1
33	14 03	f y^x
34	24 04	RCL 4
35	61	x
36	13 00	GTO 00
37	24 02	RCL 2
38	01	1
39	51	+
40	24 01	RCL 1
41	14 03	f y^x
42	01	1
43	41	–
44	24 04	RCL 4
45	61	x
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3
R_4 PV
R_5 FV
R_6
R_7

Beispiele:

1. Wie lange wird es bei einer jährlichen Inflationsrate von 10% dauern, bis sich die Preise verdoppelt haben werden? (Hinweis: Setzen Sie PV = 1 und FV = 2.)
2. Wie hoch ist der jährliche Ertrag, wenn eine Einlage von 1000 DM bei vierteljährlicher Zinszurechnung innerhalb von 5 Jahren auf 1500 DM anwächst?
3. Wieviel müssen Sie heute anlegen, damit dieser Betrag bei 5¾% und vierteljährlicher Zinszurechnung zum Kapital in 5 Jahren auf 3000 DM angewachsen ist?
4. Auf wieviel DM sind Ihre Spareinlagen von 2000 DM in 4 Jahren angewachsen, wenn sie mit 5¾% p.a. verzinst werden und die Zinsen dem Kapital vierteljährlich zugerecht werden? (i = 0.0575/4, 4 Jahre = 16 Quartale.)

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Für Anzahl der Zinsperioden	i (dezimal)	STO	2			
		PV	STO	4			
		FV	STO	5			
			f	PRGM	R/S		n
3	Für Periodenzinssatz						
		n	STO	1			
		PV	STO	4			
		FV	STO	5			
			GTO	11	R/S		i (dezimal)
4	Für Anfangskapital	n	STO	1			
		i (dezimal)	STO	2			
		FV	STO	5			
			GTO	20	R/S		PV
5	Für Endkapital	n	STO	1			
		i (dezimal)	STO	2			
		PV	STO	4			
			GTO	29	R/S		FV
6	Für Gesamt-Zinsbetrag	n	STO	1			
		i (dezimal)	STO	2			
		PV	STO	4			
			GTO	37	R/S		I
7							

5. Wieviel Zinsen erhalten Sie auf eine Einlage von 1500 DM über 10 Jahre, wenn der Zinssatz 5½% beträgt und die Zinsen jährlich dem Kapital zugerechnet werden?

Lösungen:

1. 7,27 Jahre
2. .0205 pro Quartal = 8,19% p.a.
3. 2255.02 DM
4. 2513.08 DM
5. 1062.22 DM (i = 0.055)

15. VORSCHÜSSIGE SPARRATEN (SPARRATE, ENDBETRAG, ANZAHL DER PERIODEN)

Für den Fall einer periodischen Kapitaleinzahlung (Sparprogramm) können Sie mit Hilfe dieses Programms die Höhe der konstanten Sparrate (PMT), den Endbetrag (FV) oder die Anzahl (n) der Ratenzahlungen (= Anzahl der Zinsperioden) berechnen, wenn der Periodenzinssatz (i) und zwei der vorgenannten drei Größen gegeben sind.

n, PMT oder FV können nach den folgenden Formeln berechnet werden:

$$n = \frac{\ln\left[\frac{FV\,i}{PMT} + (1+i)\right]}{\ln(1+i)} - 1 \qquad PMT = \frac{FV\,i}{(1+i)^{n+1} - (1+i)}$$

$$FV = \frac{PMT}{i}\left[(1+i)^{n+1} - (1+i)\right]$$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 02	RCL 2
02	24 05	RCL 5
03	61	x
04	24 03	RCL 3
05	71	÷
06	24 02	RCL 2
07	01	1
08	51	+
09	23 00	STO 0
10	51	+
11	14 07	f LN
12	24 00	RCL 0
13	14 07	f LN
14	71	÷
15	01	1
16	41	–
17	13 00	GTO 00
18	24 05	RCL 5
19	24 02	RCL 2
20	61	x
21	24 02	RCL 2
22	01	1
23	51	+
24	71	÷

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	14 73	f LASTx
26	24 01	RCL 1
27	14 03	f y^x
28	01	1
29	41	–
30	71	÷
31	13 00	GTO 00
32	24 03	RCL 3
33	24 02	RCL 2
34	01	1
35	51	+
36	61	x
37	14 73	f LASTx
38	24 01	RCL 1
39	14 03	f y^x
40	01	1
41	41	–
42	61	x
43	24 02	RCL 2
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 (1 + i)
R_1 n
R_2 i
R_3 PMT
R_4
R_5 FV
R_6
R_7

Beispiele:

1. Wie lange wird es dauern, bis Sie 15000 DM gespart haben, wenn Sie vierteljährlich 400 DM auf ein Konto einzahlen, dessen Einlage mit 6% p.a. verzinst wird?
2. Sie werden in 7 Jahren 10000 DM benötigen. Wieviel müssen Sie monatlich im Rahmen eines Sparprogramms einzahlen, das Ihre Einlagen mit 6½% verzinst?
3. Wieviel werden Sie am Ende angespart haben, wenn Sie monatlich über drei Jahre 150 DM in einen Fond einzahlen, der die Einlage mit 6% p.a. (0.06) verzinst?

Lösungen:

1. 29,62 Quartale oder 7,40 Jahre (i = .06/4)
2. 93,82 DM (n = 84, i = .065/12)
3. 5929,92 DM (n = 36, i = .06/12)

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Für Anzahl der Zahlungen						
		i (dezimal)	STO	2			
		PMT	STO	3			
		FV	STO	5			
			f	PRGM	R/S		n
3	Für Ratenbetrag						
		n	STO	1			
		i (dezimal)	STO	2			
		FV	STO	5			
			GTO	18	R/S		PMT
4	Für Endbetrag	n	STO	1			
		i (dezimal)	STO	2			
		PMT	STO	3			
			GTO	32	R/S		FV
5	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

16. CASH FLOW-ANALYSE (INVESTITIONSANALYSE GEGENWÄRTIGER NETTOWERT, INTERNER ZINSSATZ)

Dieses Programm wird im wesentlichen dazu verwendet, den gegenwärtigen Nettowert einer Reihe von Cash Flows (durch Diskontieren) zu berechnen. Sie erwarten zum Beispiel, daß eine Investition V_0 in der Zukunft die periodischen Cash Flows C_1, C_2, ..., C_n bringen wird. Das Programm berechnet jetzt zu vorgegebenem internen Zinssatz i (der als Dezimalzahl einzugeben ist) den gegenwärtigen Nettowert NPV_k der Cash Flows bis C_k. Ist NPV_k negativ, so bedeutet das, daß die Investition noch nicht lohnend war. Ist NPV_k dagegen positiv, war die Investition insoweit lohnend, als der Ertrag den vorgegebenen internen Zinssatz i übersteigt.

Das Programm kann auch zur iterativen Berechnung des internen Zinssatzes verwendet werden. Es gilt den internen Zinssatz i zu finden, für den der gegenwärtige Nettowert NPV_n gleich Null ist. Dazu müssen Sie V_0 speichern und eine erste Schätzung für i vorgeben. Jetzt sind die Cash Flows C_1 bis C_n einzugeben und dann ist NPV_n zu berechnen. Ist dieser Wert negativ, war der geschätzte Wert für i zu hoch angenommen, ist NPV_n positiv, war der interne Zinssatz zu klein gewählt. Jetzt ist ein besserer Schätzwert zu speichern und die Rechnung zu wiederholen. Nach Prüfung des neuen Wertes für NPV_n ist der Wert für i wiederum abzuändern, bis der sich ergebende Wert für NPV_n nahe bei Null liegt oder besser noch gleich Null ist. Der letzte Wert für i ist dann der gesuchte Wert für den internen Zinssatz.

Das Programm verwendet die Formel:

$$NPV_k = -V_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{C_j}{(1+i)^j}$$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 01	RCL 1
02	01	1
03	23 04	STO 4
04	51	+
05	23 02	STO 2
06	71	÷
07	24 00	RCL 0
08	41	–
09	24 04	RCL 4
10	14 74	f PAUSE
11	21	x⇄y
12	23 03	STO 3
13	74	R/S
14	24 02	RCL 2
15	24 04	RCL 4
16	01	1
17	51	+
18	23 04	STO 4
19	14 03	f y^x
20	71	÷
21	24 03	RCL 3
22	51	+
23	13 09	GTO 09
24		

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 V_0
R_1 i
R_2 (1 + i)
R_3 NPV_k
R_4 k
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Es ist Ihnen die Möglichkeit gegeben, 150000 DM in ein Projekt zu investieren. Aus dieser Investition folgen die nachstehenden Cash Flows. Prüfen Sie, ob diese Investition rentabel ist, wenn die Kapitalkosten mit 10% angenommen werden.

Jahr	**Cash Flow**
1	30000 DM
2	26300 DM
3	50000 DM
4	55600 DM
5	45200 DM

Lösung:

(Beachten Sie, daß i als 0.10 einzugeben ist.)

$NPV_1 = -122\,727{,}27$ DM
$NPV_2 = -100\,991{,}74$ DM
$NPV_3 = -\ 63\,426{,}00$ DM
$NPV_4 = -\ 25\,450{,}45$ DM
$NPV_5 = \quad 2\,615{,}20$ DM

Da NPV_5 positiv ist, ist die Investition in Bezug auf angenommene Kapitalkosten von 10% rentabel.

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Investition und internen						
	Zinssatz eingeben	V_0	STO	0			
		i (dezimal)	STO	1	f	PRGM	
3	Führen Sie 3 aus für k=1, ...,						
	n. Geben Sie C_k ein und	C_k	R/S				(k)
	berechnen Sie NPV_k						NPV_k
4	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

17. KALENDER (WOCHENTAG, ANZAHL TAGE ZWISCHEN ZWEI KALENDERDATEN)

Dieses Programm berechnet zu einem Kalenderdatum den Wochentag sowie die Zahl der Kalendertage zwischen zwei gegebenen Kalenderdaten innerhalb der Grenzen 1. März 1700 bis 28. Februar 2100. Das Programm ordnet dem 1. März 1700 die Zahl 1 zu und numeriert die weiteren Tage entsprechend durch. Bei der Berechnung des Wochentages steht 0 für Sonntag, 1 für Montag, 2 für Dienstag usw.

Die dem Datum Monat m, Tag d und Jahr y zugeordnete Zahl N wird nach der folgenden Formel berechnet:

$$N(m, d, y) = [365.25\, g(y, m)] + [30.6\, f(m)] + d - 621049$$

$$\text{wobei}\quad g(y, m) = \begin{cases} y-1 & \text{falls } m = 1 \text{ oder } 2 \\ y & \text{falls } m>2 \end{cases}$$

$$\text{und}\quad f(m) = \begin{cases} m+13 & \text{falls } m = 1 \text{ oder } 2 \\ m+1 & \text{falls } m>2 \end{cases}$$

[m] bezeichnet den ganzzahligen Anteil von m (Funktion [f] [INT]).

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	03	3
02	24 01	RCL 1
03	14 41	f x<y
04	13 09	GTO 09
05	01	1
06	51	+
07	24 03	RCL 3
08	13 15	GTO 15
09	01	1
10	03	3
11	51	+
12	24 03	RCL 3
13	01	1
14	41	−
15	03	3
16	06	6
17	05	5
18	73	·
19	02	2
20	05	5
21	61	x
22	14 01	f INT
23	21	x⇄y
24	03	3

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	00	0
26	73	·
27	06	6
28	61	x
29	14 01	f INT
30	51	+
31	24 02	RCL 2
32	51	+
33	06	6
34	02	2
35	01	1
36	00	0
37	04	4
38	09	9
39	41	−
40	74	R/S
41	07	7
42	71	÷
43	15 01	g FRAC
44	07	7
45	61	x
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 Monat
R_2 Tag
R_3 Jahr
R_4
R_5
R_6
R_7 belegt

Anmerkung:

Für Tage zwischen dem 1. März 1700 und dem 28. Februar 1800 sind zu dem berechneten Wert N noch 2 Tage hinzuzählen. Für Tage zwischen dem 1. März 1800 und dem 28. Februar 1900 ist N um eins zu erhöhen.

Beispiele:

1. Auf welchen Wochentag fiel der 4. Juli 1776?

2. Wieviel Tage sind es vom 27. März 1948 bis zum 7. April 1975?

Lösungen:

1. Donnerstag (4). (Beachten Sie, daß 2 Tage addiert werden müssen.)

2. 9872.

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Speichern Sie Monat	m	STO	1			
	Tag	d	STO	2			
	Jahr	y	STO	3			
3	Berechnen Sie N (m, d, y)		f	PRGM	R/S		N (m, d, y)
4	Für den Wochentag, gehen Sie nach 8.						
5	Für Anzahl der Tage,						
	speichern Sie zuvor N		STO	7			
6	Wiederholen Sie 2 und 3 für						
	das zweite Datum, dann		RCL	7	–		Anzahl der Tage
7	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						
8	Für den Wochentag (0=Sonntag)		R/S				Wochentag (0, ..., 6)
9	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

ABSCHNITT 3: SPIELPROGRAMME

18. MONDLANDUNG

Stellen Sie sich einmal die Schwierigkeiten bei der Aufgabe vor, eine Rakete mittels geschicktem Zünden der Bremstriebwerke weich auf der Mondoberfläche zu landen, wobei der Treibstoffvorrat eng begrenzt ist. Zu Beginn des Manövers fällt der Flugkörper im freien Fall auf den Mond zu. Jetzt müssen zum Abbremsen der Fallgeschwindigkeit die auf die Mondoberfläche gerichteten Triebwerke gezündet werden; geschieht dies aber zu früh oder über eine zu lange Zeit, dauert der Abstieg wegen inzwischen zu geringer Sinkgeschwindigkeit zu lange und es besteht die Gefahr, daß noch vor Erreichen der Landefläche der Treibstoff ausgeht. Dann bleibt der Besatzung nur noch das Warten auf den Aufschlag! Das Problem ist also, die kurzen Bremsstöße so zu verteilen, daß die Mondoberfläche mit Sinkgeschwindigkeit Null erreicht wird, bevor der Treibstoff zur Neige geht.

Das Spiel beginnt damit, daß sich die Rakete mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß/Sekunde und in einer Höhe von 500 Fuß im freien Fall befindet. Geschwindigkeit und Höhe über Grund werden in einer kombinierten Anzeige als −50.0500 dargestellt; die Höhe steht rechts vom Dezimalpunkt und die Geschwindigkeit auf der linken Seite. Das Minuszeichen deutet an, daß die Geschwindigkeit auf den Mond zu gerichtet ist. Wird eine Geschwindigkeit ohne Nachkommaanteil angezeigt (z.B. −15.), so besagt dies, daß Sie mit einer solchen Geschwindigkeit auf dem Mond aufgeschlagen sind (hier also mit 15 ft/s). In diesem Fall haben Sie also das Spiel verloren; unter realen Umständen wären die Konsequenzen wohl weit unangenehmer.

Sie haben zu Beginn des Spiels 120 Gallonen Treibstoff zur Verfügung. Davon können Sie in jeder Phase Ihres Abstiegs soviel oder sowenig verbrauchen, wie Sie möchten; dabei ist es durchaus üblich, daß auch einmal gar kein Bremsstoß veranlaßt wird. Ein Impuls von 5 Gallonen gleicht jeweils gerade die Gravitation (Anziehungskraft) aus und bewirkt, daß die Geschwindigkeit gleich bleibt. Jede Menge über 5 Gallonen bewirkt eine Änderung der Geschwindigkeit «nach oben». Sie müssen aufpassen, daß Sie nicht mehr Treibstoff verbrauchen wollen, als Sie noch besitzen; dann findet überhaupt kein Bremsstoß statt und Sie fallen den Rest der Strecke im freien Fall auf den Mond zu. Die zuletzt angezeigte Geschwindigkeit ist die Aufprallgeschwindigkeit, die in der Regel recht hoch liegt. Der noch verbleibende Treibstoffvorrat kann jederzeit aus Register R_2 abgerufen werden.

Gleichungen:

Wir wollen hier nicht zu wissenschaftlich werden, weil das sonst sicherlich den Spaß am Spiel verderben würde; seien Sie aber sicher, daß das Spiel auf soliden Grundlagen der Newton'schen Mechanik aufbaut:

$$x = x_0 + v_0 t + at^2/2 \qquad v = v_0 + at \qquad v^2 = v_0^2 + 2ax$$

wobei x, v, a und t die Abkürzungen für Wegstrecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit sind.

Anmerkungen:

1. Wenn Sie aufschlagen (pardon!), bevor der Treibstoff zur Neige gegangen ist, ist die angezeigte Geschwindigkeit diejenige vor dem letzten Bremsstoß.
2. Für den jeweiligen Bremsschubstoß darf immer nur eine ganzzahlige Anzahl Gallonen Treibstoff verwendet werden; die Eingabe nicht ganzzahliger Werte bewirkt Fehler in der Anzeige V.X.

Anmerkungen zum Programm:

Eine interessante Eigenschaft dieses Programms ist die kombinierte Anzeige von V und X (z. B. –50.0500). Dies wird erreicht, indem V und X zuerst in ihrer normalen Form gespeichert werden (z. B. –50.00, 500.00); dann wird X durch 10^4 (10000) dividiert, bevor beide Zahlen (durch Addition oder Subtraktion) kombiniert werden. Interessant ist auch die Frage des Vorzeichens von V, und ob $(X/10^4)$ addiert oder subtrahiert werden soll. Wenn V = –50 und X = 500, müssen wir subtrahieren, um als Anzeige –50.0500 zu erhalten; ist dagegen V = 10 und X = 50 sind beide Zahlen zu addieren, damit man 10.0050 erhält. Wenn Sie sich die Programmzeilen 2 bis 12 ansehen, können Sie erkennen, wie dieses Problem mit Hilfe der Absolutwert-Funktion (g ABS) gelöst wurde.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
00							
01	14 11 04	f FIX 4					Four-place display
02	24 00	RCL 0	X				Form display V.X
03	33	EEX	1. 00	X			
04	04	4	1. 04	X			
05	71	÷	$X/10^4$				Divide X by 10,000
06	24 01	RCL 1	V	$X/10^4$			
07	15 41	g x<0	V	$X/10^4$			Is V negative?
08	13 11	GTO 11	V	$X/10^4$			Yes, branch
09	51	+	$V + X/10^4$				No, add V and X
10	13 13	GTO 13	$V + X/10^4$				
11	21	x⇄y	$X/10^4$	V			V<0, add V and −X
12	41	−	$V - X/10^4$				
13	74	R/S	V.X				V.X is $V \pm (X/10^4)$
14	24 02	RCL 2	F	B			Burn B has been input
15	14 41	f x<y	F	B			Burn > Fuel?
16	13 34	GTO 34	F	B			Yes, prepare to crash
17	22	R↓	B			F	No, update A, X, V
18	23 41 02	STO − 2	B			F	Subtract burn from fuel
19	05	5	5	B			5 units cancels gravity
20	41	−	B − 5				Acceleration = B − 5
21	23 03	STO 3	A				
22	02	2	2	A			
23	71	÷	A/2				
24	24 00	RCL 0	X	A/2			
25	51	+	X + A/2				
26	24 01	RCL 1	V	X + A/2			
27	51	+	X + V + A/2				New altitude: X←X+V+A/2
28	23 00	STO 0	X				
29	15 41	g x<0	X				Is X below ground?
30	13 44	GTO 44	X				Yes, you've crashed
31	24 03	RCL 3	A	X			No, updade V
32	23 51 01	STO + 1	A	X			New velocity: V ← V + A
33	13 02	GTO 02	A	X			Display V.X
34	24 01	RCL 1	V				All fuel gone, show
35	15 02	g x^2	V^2				crash velocity as
36	24 00	RCL 0	X	V^2			$V = (V^2 + 2gX)^{1/2}$
37	01	1	1	X	V^2		where g = gravity = 5
38	00	0	10	X	V^2		
39	61	×	10 X	V^2			
40	51	+	$V^2 + 10X$				
41	14 02	f $\sqrt{x}$	V				
42	32	CHS	V				Show crash V down
43	23 01	STO 1	V				
44	24 01	RCL 1	V				Come here from line 30
45	14 11 00	f FIX 0	V				Display integer V to
46	13 00	GTO 00	V				show crash
47							
48							
49							

REGISTERS	
R_0	X
R_1	V
R_2	Treibstoffvorrat
R_3	Beschleunigung
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Programm starten	X	500	STO	0		500.00
		V	50	CHS	STO	1	-50.00
		Treibstoff	120	STO	2		120.00
3	Erste Anzeige V.X		f	PRGM	R/S		-50.0500
4	Geben Sie Bremsstoß ein und						
	berechnen Sie neue Geschwindigkeit und Höhe	Bremsstoß	R/S				V.X
5	Wiederholen Sie 4 bis zur Lan-						
	dung oder zum Aufschlag.						
6	Zur Anzeige des noch						
	verbleibenden Treibstoffs.		RCL	2			Treibstoff
7	Zur Anzeige des letzten						
	Wertes V.X		f	PRGM	R/S		V.X
8	Für ein neues Spiel, gehen Sie nach 2.						

Beispiel:

500 STO 0 50 CHS STO 1 120 STO 2

f PRGM R/S ⟶ -50.0500

0 R/S ⟶ -55.0448

5 R/S ⟶ -55.0393

(Beachten Sie die konstante Geschwindigkeit bei Bremsstößen von 5 Gal.)

30 R/S ⟶ -30.0350

0 R/S ⟶ -35.0318

0 R/S ⟶ -40.0280

0 R/S ⟶ -45.0238

0 R/S ⟶ -50.0190

RCL 2 ⟶ 85.0000
(verbleibender Treibstoff)

f PRGM R/S ⟶ -50.0190
(wieder Anzeige von V.X)

10 R/S ⟶ -45.0143

0 R/S ⟶ -50.0095

RCL 2 ⟶ 75.0000

10 R/S ⟶ -45.0048

25 R/S ⟶ -25.0013

20 R/S ⟶ -25.

Im Gegensatz zum «Ernstfall» haben Sie jetzt einen weiteren Versuch frei.

19. NIMM-SPIEL

Das Nimm-Spiel beginnt damit, daß N gleiche Objekte (z.B. Münzen oder Streichhölzer) auf dem Tisch liegen. Die beiden Spieler haben jetzt abwechselnd ein, zwei oder drei der Gegenstände wegzunehmen. Verloren hat derjenige, der gezwungen ist, das letzte der Objekte zu nehmen.

Dieses Spiel können Sie mit dem HP-25 spielen. Begonnen wird mit der Zahl N, dann haben Sie und der Rechner abwechselnd eins, zwei oder drei zu subtrahieren.

Zu Beginn des Spiels müssen Sie einen Wert für N eingeben; vernünftig ist zum Beispiel 15. Der Rechner zeigt nach jedem Zug an, wieviel noch übrig ist. Ein Minuszeichen in der Anzeige besagt, daß Sie am Zug sind; ist die Anzeige positiv, muß der HP-25 den nächsten Zug tun.

Großzügigerweise läßt Sie der Rechner das Spiel beginnen. Sie können durchaus gewinnen, wenngleich der HP-25 ein ausgesprochener Meisterspieler ist. Es ist nämlich nicht möglich, daß Sie einen Fehler machen, ohne daß dies der Rechner merkt und sich seinen Sieg sichert. Dies gilt zumindest unter der Voraussetzung, daß Sie nicht mogeln und eine andere Zahl als 1, 2 oder 3 abziehen. Da Ihr HP-25 mit einem fairen Gegenspieler rechnet, erspart er es sich, Ihre Ehrlichkeit zu überprüfen.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	31	↑
02	01	1
03	23 02	STO 2
04	22	R↓
05	23 41 00	STO – 0
06	24 00	RCL 0
07	15 71	g x=0
08	13 42	GTO 42
09	23 61 02	STO x 2
10	24 02	RCL 2
11	74	R/S
12	21	x⇄y
13	15 51	g x⩾0
14	13 17	GTO 17
15	21	x⇄y
16	13 02	GTO 02
17	01	1
18	32	CHS
19	23 02	STO 2
20	00	0
21	23 01	STO 1
22	24 01	RCL 1
23	03	3
24	14 71	f x=y

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	13 40	GTO 40
26	01	1
27	3 51 01	STO + 1
28	32	CHS
29	24 00	RCL 0
30	51	+
31	24 01	RCL 1
32	41	–
33	04	4
34	71	÷
35	15 01	g FRAC
36	15 61	g x≠0
37	13 22	GTO 22
38	24 01	RCL 1
39	13 05	GTO 05
40	01	1
41	13 05	GTO 05
42	24 02	RCL 2
43	15 41	g x<0
44	13 47	GTO 47
45	24 03	RCL 3
46	13 00	GTO 00
47	24 04	RCL 4
48	14 11 01	f FIX 1
49	13 00	GTO 00

REGISTERS
R_0 Anzahl
R_1 Zug des HP-25
R_2 ± Anzahl
R_3 55178
R_4 3507.1
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Beginnen Sie mit der Eingabe von N = 15.

Sie nehmen 3.

Example:

3 [R/S] ⟶ 12.

[R/S] ⟶ –9.

Der Rechner hat 3 genommen.

Sie nehmen 2.

2 [R/S] ⟶ 7.

[R/S] ⟶ –5.

Der Rechner hat 2 genommen.

Sie nehmen 3.

3 [R/S] ⟶ 2.

[R/S] ⟶ –1.

Der Rechner hat 1 genommen.

Sie müssen die 1 nehmen.

1 [R/S] ⟶ 55178.

Stellen Sie den Rechner auf den Kopf und lesen Sie die Meldung «BLISS» («große Freude!»).

(Wenn Sie gewinnen, zeigt der Rechner «I. LOSE» an («Ich verliere»).)

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Zu Beginn	55178	STO	3			
		3507.1	STO	4	f	PRGM	
3	Anfangszahl der Objekte						
	speichern und Anzeigeformat	N	STO	0	CHS	f	
	wählen		FIX	0			–N.
4	Falls Anzeige negativ,						
	tasten Sie Ihren Zug ein	Ihr Zug	R/S				+Anzahl
5	Falls Anzeige positiv,						
	ist HP-25 am Zug		R/S				– Anzahl
6	Wiederholen Sie 4 und 5,						
	bis das Spiel aus ist						
7	Drehen Sie den Rechner nach Spielende auf den Kopf						
	und lesen Sie die Nachricht.						
8	Für ein neues Spiel, gehen Sie nach 3.						

20. ARITHMETIK-LERNPROGRAMM

Sicherlich trägt der Umgang mit wissenschaftlichen Taschenrechnern auch in vielen Bereichen der Mathematik zum Vertiefen der Kenntnisse oder zum «Auffrischen» des früher einmal gelernten Stoffes bei. Dieses Programm, es kann dazu verwendet werden, Kinder in die elementaren Grundrechnungsarten einzuführen, demonstriert einmal die noch weitgehend unerforschten Möglichkeiten, den HP-25 als Lehrgerät einzusetzen.

Das Programm stellt eine einfache Rechenaufgabe, prüft die von Ihnen eingegebene Antwort und zeigt an, ob die Lösung richtig war. Falls ja, wird ein neues Problem gestellt, falls nicht, stellt Ihnen der Rechner die gleiche Aufgabe noch einmal und gibt Ihnen noch einmal eine Chance.

Zu Beginn müssen Sie einen Wert Max in R_0 speichern. Damit werden in der Folge nur solche Zahlen in den Aufgaben auftreten, die kleiner oder gleich Max sind. Geben Sie für Max beispielsweise 12 ein, werden alle gestellten Probleme nur die Zahlen 0 bis 11 verwenden. Dann muß vom Benutzer ein Wert s zwischen 0 und 1 in R_1 gespeichert werden, der die Folge bestimmt, in der Zahlen für die Aufgaben erzeugt werden. Verschiedene Werte für s haben verschiedene Aufgabenreihen zu Folge, so daß das Spiel nicht langweilig wird. Im Anzeigeformat $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{FIX}}$ $\boxed{2}$ stellt Ihnen das Programm die erste Aufgabe wie folgt: Eine Zahl wird links vom Dezimalpunkt, die andere rechts davon angezeigt. Die Zahlen 8 und 2 würden beispielsweise als 8.02 angezeigt. Jetzt können Sie wählen, welche der vier Grundrechnungen Sie mit diesen beiden Zahlen durchführen wollen: Sie können Sie addieren $(8+2)$, subtrahieren $(8-2)$, multiplizieren (8×2) oder dividieren $(8 \div 2)$. Wenn Sie das Resultat eingetastet und das Programm erneut gestartet haben, stellt Ihnen der Rechner entweder eine neue Aufgabe, oder er bringt, wenn die Antwort falsch war, die gleichen Zahlen noch einmal, diesmal aber mit vorangestelltem Minuszeichen. Das Vorzeichen ist stets die Antwort auf ein falsches Ergebnis und steht nicht etwa für eine negative Zahl. (Alle in den Aufgaben vorkommenden Zahlen sind positiv, wenngleich die Resultate einiger Subtraktionen negativ sein können.) War das Ergebnis, das Sie eingegeben haben, falsch, können Sie es noch einmal versuchen. Sobald die richtige Antwort gegeben wurde, stellt der HP-25 eine neue Aufgabe.

DISPLAY		KEY
LINE	CODE	ENTRY
00		
01	24 01	RCL 1
02	15 73	g π
03	15 02	g x^2
04	61	x
05	15 01	g FRAC
06	23 01	STO 1
07	24 00	RCL 0
08	61	x
09	14 01	f INT
10	23 03	STO 3
11	24 01	RCL 1
12	15 73	g π
13	15 02	g x^2
14	61	x
15	15 01	g FRAC
16	23 01	STO 1
17	24 00	RCL 0
18	61	x
19	14 01	f INT
20	23 02	STO 2
21	24 03	RCL 3
22	33	EEX
23	02	2
24	71	÷

DISPLAY		KEY
LINE	CODE	ENTRY
25	51	+
26	23 04	STO 4
27	74	R/S
28	24 02	RCL 2
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	13 43	GTO 43
32	24 02	RCL 2
33	24 03	RCL 3
34	41	–
35	13 43	GTO 43
36	24 02	RCL 2
37	24 03	RCL 3
38	61	x
39	13 43	GTO 43
40	24 02	RCL 2
41	24 03	RCL 3
42	71	÷
43	14 71	f x=y
44	13 01	GTO 01
45	24 04	RCL 4
46	32	CHS
47	13 27	GTO 27
48		
49		

REGISTERS
R_0 Max
R_1 Zufallszahl
R_2 linke Zahl
R_3 rechte Zahl
R_4 Lösung
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Wählen Sie Max = 12 und s = 0,725.

Lösung:

f PRGM R/S → 6.01
(6 + 1 = 7)

7 R/S → 8.03
(8 x 3 = 25)

25 GTO 3 6 R/S → –8.03
(neuer Versuch: 8 × 3 = 24)

24 GTO 3 6 R/S → 3.11
(3 – 11 = –8)

8 CHS GTO 3 2 R/S → 9.00
(9 + 0 = 9)

9 R/S → 2.05

usw.

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Max speichern ($0 \leq Max \leq 100$)	Max	STO	0			
3	Zufallszahl s ($0 \leq s \leq 1$) eingeben	s	STO	1			
4	Anzeigeformat wählen		f	FIX	2		
5	Aufgabe erzeugen		f	PRGM	R/S		$n_1 . n_2$
6	Rechenart wählen und						
	Antwort eintasten						
	Für Addition (+)	$n_1 + n_2$	R/S				
	für Subtraktion (–)	$n_1 - n_2$	GTO	32	R/S		
	für Multiplikation (×)	$n_1 \times n_2$	GTO	36	R/S		
	für Division (÷)	$n_1 \div n_2$	GTO	40	R/S		
7	Wenn Ihre Antwort richtig						
	war, stellt der Rechner eine						
	neue Aufgabe, gehen Sie nach 6						$n_3 . n_4$
8	War die Antwort falsch, bringt						
	der Rechner die Zahlen noch						
	einmal; gehen Sie nach 6.						$-n_1 . n_2$
9	Wiederholen Sie 6–8						
	beliebig oft.						
10	Zum Ändern von Max, gehen						
	Sie nach 2, dann nach 5.						

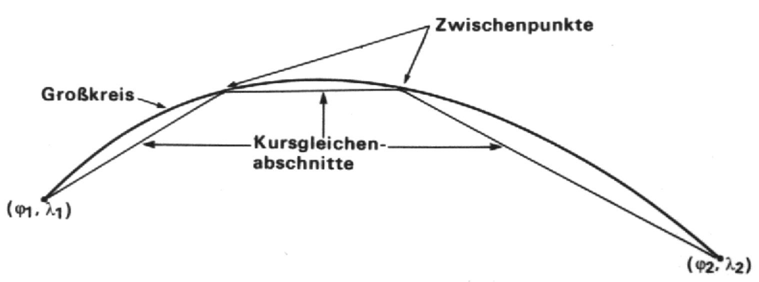
ABSCHNITT 4: NAVIGATION

GROSSKREIS, NAVIGATION NACH KURSGLEICHE

Längere See- bzw. Flugreisen werden normalerweise entlang einer der beiden folgenden Kurslinien durchgeführt: auf der Kursgleiche (Loxodrome) oder längs des Großkreises (Orthodrome). Die Kursgleiche verbindet zwei Punkte auf der Erdoberfläche derart miteinander, daß der zu steuernde Kurs auf der ganzen Strecke gleich bleibt, d. h., sie schneidet alle Meridiane unter dem gleichen Winkel. In einer Merkatorkarte (Zylinderprojektion) wird sie als gerade Linie dargestellt. Auf diesem Weg ist wegen des konstanten Kurses leicht zu navigieren, weswegen man auch in kleinen oder mittleren Breiten auf nicht zu langen Distanzen nach der Kursgleiche steuert.

Für größere Distanzen oder in größeren Breiten ist es sinnvoll, nach Großkreisen zu navigieren (Orthodromen-Navigation). Der Großkreis kann aber genau genommen garnicht exakt gesteuert werden, da dazu zu jedem Zeitpunkt ein geringfügig anderer Kurs erforderlich ist. Man geht daher hin und zerlegt die Orthodrome in eine ihr angenäherte Folge kurzer Loxodromenabschnitte (Kursgleichen).
Beim Absetzen des Kurses nach dieser Methode verwenden Sie zuerst das Programm «Großkreis». Sie müssen dazu die Koordinaten (Länge und Breite) von Startort und Zielort eingeben. Dann berechnet dieses Programm zu jeder beliebigen geographischen Länge die Breite, unter der der Großkreis diesen Längengrad schneidet. Wenn Sie auf diese Weise mehrere Koordinatenpaare (φ_i, λ_i) berechnet haben, können Sie das nächste Programm dazu verwenden, den jeweiligen Kurs und die Entfernung auf den Kursgleichen-Abschnitten zu berechnen, die diese Punkte miteinander verbinden.

Das Programm «Navigation nach Kursgleiche» können Sie auch unabhängig verwenden. Nach Eingabe der Koordinaten von Start- und Zielort berechnet es den Loxodromenkurs sowie die Entfernung von Start bis Ziel.



21. GROSSKREIS

Formel:

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left[\frac{\tan\varphi_2 \sin(\lambda_i - \lambda_1) - \tan\quad_1 \sin(\lambda_i - \lambda_2)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}\right]$$

wobei (φ_1, λ_1) = Koordinaten des Ausgangspunktes.
(φ_2, λ_2) = Koordinaten des Zielpunktes.
(φ_i, λ_i) = Koordinaten des Punktes auf dem Großkreis.

Anmerkung:

Start- und Zielort dürfen nicht die gleiche geographische Länge besitzen, d. h., es muß gelten $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

DISPLAY		KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
LINE	CODE						
00			λ_i, D.MS				
01	15 00	g →H	λ_i, D.d				Convert λ_i to decimal deg.
02	23 04	STO 4	λ_i				
03	24 01	RCL 1	λ_1	λ_i			
04	41	–	$\lambda_i - \lambda_1$				
05	14 04	f SIN	$\sin_1$				$\sin_1 = \sin(\lambda_i - \lambda_1)$
06	24 02	RCL 2	L_2	$\sin_1$			
07	14 06	f TAN	$\tan_2$	$\sin_1$			$\tan_2 = \tan L_2$
08	61	x	$\tan_2 \sin_1$				
09	24 04	RCL 4	λ_i	$\tan_2 \sin_1$			
10	24 03	RCL 3	λ_2	λ_i	$\tan_2 \sin_1$		
11	41	–	$\lambda_i - \lambda_2$	$\tan_2 \sin_1$			
12	14 04	f SIN	$\sin_2$	$\tan_2 \sin_1$			$\sin_2 = \sin(\lambda_i - \lambda_2)$
13	24 00	RCL 0	L_1	$\sin_2$	$\tan_2 \sin_1$		
14	14 06	f TAN	$\tan_1$				$\tan_1 = \tan L_1$
15	61	x	$\tan_1 \sin_2$	$\tan_2 \sin_1$			
16	41	–	NUM				NUM = $\tan_2 \sin_1 - \tan_1 \sin_2$
17	24 03	RCL 3	λ_2	NUM			
18	24 01	RCL 1	λ_1	λ_2	NUM		
19	41	–	$\lambda_2 - \lambda_1$	NUM			
20	14 04	f SIN	DEN	NUM			DEN = $\sin(\lambda_2 - \lambda_1)$
21	71	÷	NUM/DEN				
22	15 06	g TAN^{-1}	L_i, D.d				
23	14 00	f →H.MS	L_i, D.MS				Display L_i in D.MS
24	14 11 04	f FIX 4					
25	13 00	GTO 00					
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTERS	
R_0	φ1 Dezimalgrad
R_1	λ1 Dezimalgrad
R_2	φ2 Dezimalgrad
R_3	λ2 Dezimalgrad
R_4	λ_i Dezimalgrad
R_5	
R_6	
R_7	

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Startkoordinaten eingeben						
	Breite (CHS für S)	φ1°	g	→H	STO	0	φ1°
	Länge (CHS für 0)	λ_1°	g	→H	STO	1	λ1°
3	Zielkoordinaten eingeben						
	Breite (CHS für S)	φ2°	g	→H	STO	2	φ2°
	Länge (CHS für 0)	λ2°	g	→H	STO	3	λ_2°
4	Gehen Sie an den Speicheranfang zurück:		f	PRGM			
5	Geben Sie die Länge des						
	Zwischenpunktes ein (CHS						
	für 0) und berechnen Sie die zugehörige Breite	λi°	R/S				φi°
6	Für einen weiteren Zwischen-						
	punkt, gehen Sie nach 5; für neue Ziel- oder Start-						
	koordinaten, gehen Sie nach 2 (oder 3).						
	(° in der Form D.M5)						

22. NAVIGATION NACH KURSGLEICHE

Formeln:

$$C = \tan^{-1} \frac{\pi(\lambda_1 - \lambda_2)}{180\,[\ln\tan(45 + \frac{1}{2}\varphi_2) - \ln\tan(45 + \frac{1}{2}\varphi_1)]}$$

$$D = \begin{cases} 60\,(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\varphi; \cos C = 0 \\ 60\,\dfrac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos C}\,; \end{cases}$$

wobei: (φ_1, λ_1) = Koordinaten des Startpunktes
(φ_2, λ_2) = Koordinaten des Zielpunktes
C = Kurs entlang der Kursgleiche
D = Entfernung entlang der Kursgleiche

Anmerkung:

1. Der Kurs darf nicht durch Nord- oder Südpol verlaufen.
2. Der Kurs darf nicht nach Ost oder West über die Internationale Datumslinie (Meridian 180° W bzw. 180° O) laufen.
3. Bei der Entfernungsberechnung treten Fehler auf, wenn C annähernd 90° oder 270° ist.
4. Für sehr kurze Teilstrecken nimmt die Genauigkeit ab.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
00			λ_2	λ_1			
01	41	−	$\lambda_1 - \lambda_2$				
02	23 06	STO 6	$\lambda_1 - \lambda_2$				
03	02	2	2	$\lambda_1 - \lambda_2$			
04	71	÷	α				Let $\alpha = 1/2\ (\lambda_1 - \lambda_2)$
05	14 04	f SIN	sin α				Normalize α so that
06	15 04	g SIN^{-1}	norm α				$-180 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 \leqslant 180$;
07	09	9	9	α			finds shortest route
08	00	0	90	α			round earth
09	71	÷	$\alpha/90$				
10	15 73	g π	π	$\alpha/90$			
11	61	x	$\pi\alpha/90$	$\pi\alpha/90$			
12	24 05	RCL 5	ln tan_2	$\pi\alpha/90$			
13	24 04	RCL 4	ln tan_1	y			Let $y = \pi\alpha/90$
14	41	−	x	y			Let $x = \ln tan_2 - \ln tan_1$
15	15 09	g →P	r	C			$C = \tan^{-1} y/x$
16	22	R↓	C			r	
17	15 03	g ABS	|C|			r	
18	23 07	STO 7	|C|			r	
19	24 06	RCL 6	$\lambda_1 - \lambda_2$	|C|			
20	14 04	f SIN	sin 2α	|C|			Normalize $\lambda_1 - \lambda_2$ so
21	15 04	g SIN^{-1}	norm 2α	|C|			that $-90 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 \leqslant 90$
22	15 41	g x<0	2α	|C|			x < 0 means East to West
23	13 26	GTO 26	2α	|C|			
24	21	x⇄y	|C|	2α			W to E, |C| is answer
25	13 31	GTO 31	|C|	2α			
26	03	3	3	2α	|C|		E to W, answer is
27	06	6	36	2α	|C|		360 − |C|
28	00	0	360	2α	|C|		
29	24 07	RCL 7	|C|	360	2α	|C|	
30	41	−	360 − |C|				
31	74	R/S	Course				Display course
32	06	6	6				Compute distance D
33	00	0	60				
34	24 07	RCL 7	|C|	60			
35	14 05	f COS	cos |C|	60			
36	15 61	g x≠0	cos |C|	60			If cos C ≠ 0,
37	13 45	GTO 45	cos |C|	60			go to line 45
38	34	CLX	0	60			Cos C = 0; heading is
39	24 06	RCL 6	$\lambda_1 - \lambda_2$				due E or due W
40	61	x	$60\ (\lambda_1 - \lambda_2)$				
41	24 02	RCL 2	L_2	$60\ (\lambda_1 - \lambda_2)$			
42	14 05	f COS	cos L_2	$60\ (\lambda_1 - \lambda_2)$			
43	61	x	Dist				$D = 60\ (\lambda_1 - \lambda_2) \cos L$
44	13 00	GTO 00	Dist				Halt and display Dist
45	71	÷	60/cos |C|				Heading is not due E or W
46	24 02	RCL 2	L_2				Apply formula:
47	24 00	RCL 0	L_1	L_2	60/cos |C|		$D = 60(L_2 - L_1)/\cos C$
48	41	−	$L_2 - L_1$	60/cos |C|			
49	61	x	Dist				Halt

REGISTERS	
R_0	$\varphi 1$ Dezimal-grad
R_1	$\lambda 1$ Dezimal-grad
R_2	$\varphi 2$ Dezimal-grad
R_3	$\lambda 2$ Dezimal-grad
R_4	ln tan $(45+\varphi_1/2)$
R_5	ln tan $(45+\varphi_2/2)$
R_6	$\lambda_1 - \lambda_2$
R_7	|C|

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Breite des Startortes eingeben						
	(CHS für S)	$\varphi 1$, D.MS	g	→H	STO	2	
			2	÷	45	+	
			f	TAN	f	LN	
			STO	5			$\ln \tan_1$
3	Länge des Startortes eingeben						
	(CHS für 0)	$\lambda 1$, D.MS	g	→H	STO	3	$\lambda 1$, Dezimalgrad
4	Breite des Zielortes eingeben						
	(CHS für S)	$\varphi 2$, D.MS	g	→H	RCL	2	
			STO	0	x⇄y	STO	
			2	2	÷	45	
			+	f	TAN	f	
			LN	RCL	5	STO	
			4	x⇄y	STO	5	$\ln \tan_2$
5	Länge des Zielortes eingeben						
	(CHS für 0)	$\lambda 2$, D.MS	g	→H	RCL	3	
			STO	1	x⇄y	STO	
			3				$\lambda 2$, Dezimalgrad
6	Kurs berechnen		f	PRGM	R/S		C
7	Entfernung berechnen		R/S				D
8	Wollen Sie den Kurs fortsetzen,						
	gehen Sie nach 4 und geben						
	Sie neue Zielkoordinaten ein.						

Beispiel:

Ein Schiff, das von San Francisco ($=37°49'$ N, $\lambda=122°25'$ W) nach Tokyo ($=35°40'$ N, $\lambda=139°45'$ O) fährt, soll den Großkreis durch drei Kursgleichenabschnitte annähern. Der Navigator legt die geographische Länge der Zwischenpunkte mit 155° W und 175° O fest. Berechnen Sie die Loxodromenkurse (Kursgleiche), denen das Schiff folgen muß und die Länge der drei Streckenabschnitte.

Lösung:

Tasten Sie als erstes das Programm «Großkreis» ein.

37.49 [g] [→H] [STO] [0] 122.25 [g] [→H] [STO] [1] 35.40 [g] [→H] [STO] [2] 139.45 [CHS] [g] [→H] [STO] [3] [f] [PRGM] 155 [R/S] → 47.4606

175 [CHS] [R/S] → 47.3610

Die beiden Zwischenpunkte haben also die Koordinaten (47° 46′ N, 155° W) und (47° 36′ N, 175° O).

Tasten Sie jetzt das Programm «Navigation nach Kursgleiche» ein.

Koordinaten des Startpunktes:

37.49 [g] [→H] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [STO] [5]
122.25 [g] [→H] [STO] [3]

Berechnen Sie Kurs und Entfernung zum ersten Zwischenpunkt:

47.4606 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x⇄y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL] [5] [STO] [4] [x⇄y] [STO] [5] 155 [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x⇄y] [STO] [3] [f] [PRGM]

[R/S] ⟶ 292.67 (Kurs)

[R/S] ⟶ 1549.38 (Entfernung)

Berechnen Sie Kurs und Entfernung zum zweiten Zwischenpunkt:

47.361 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x⇄y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL] [5] [STO] [4] [x⇄y] [STO] [5] 175 [CHS] [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x⇄y] [STO] [3] [f] [PRGM]

[R/S] ⟶ 269.53 (Kurs)

[R/S] ⟶ 1211.80 (Entfernung)

Berechnen Sie Kurs und Entfernung zum Ziel:

35.40 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x⇄y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL] [5] [STO] [4] [x⇄y] [STO] [5] 139.45 [CHS] [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x⇄y] [STO] [3] [f] [PRGM]

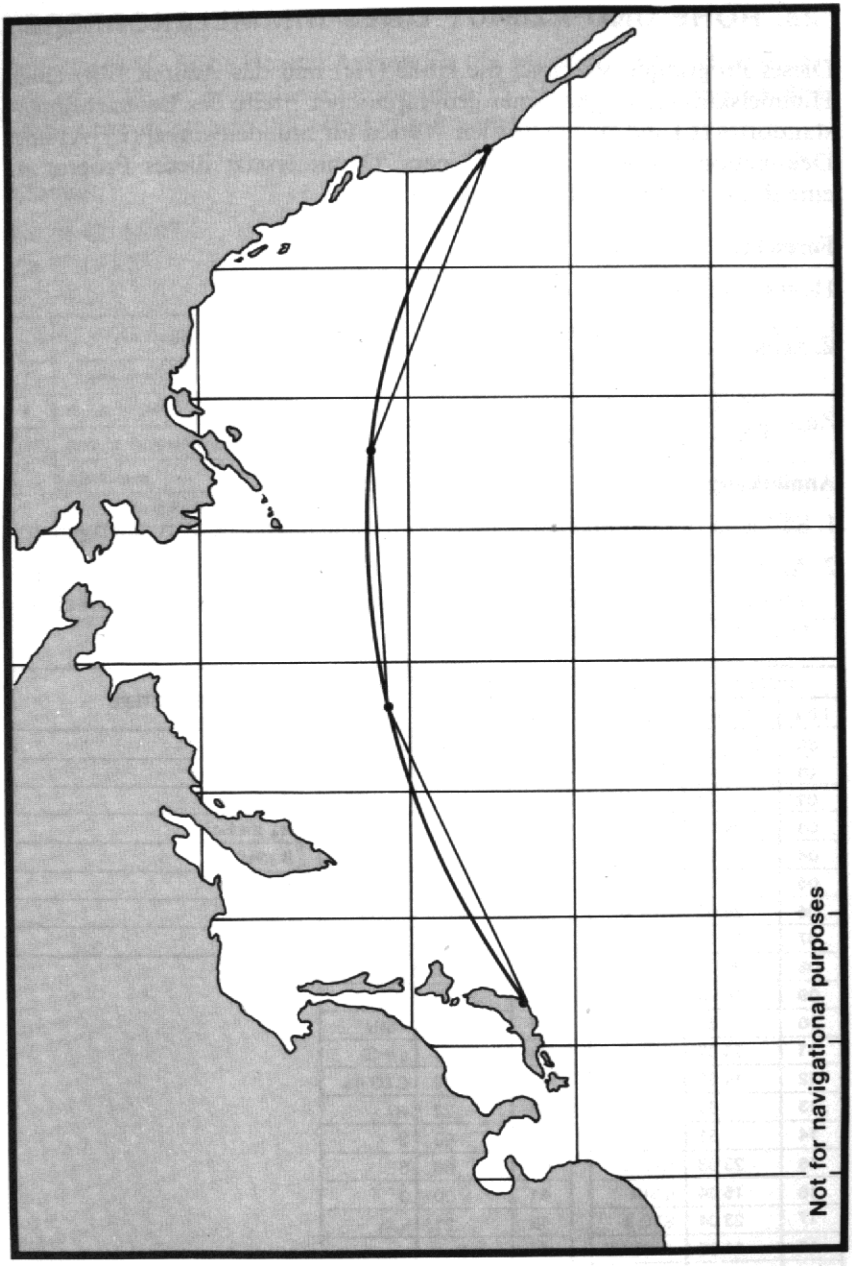
[R/S] ⟶ 245.53 (Kurs)

[R/S] ⟶ 1728.66 (Entfernung)

Beispiel:

Zusammenfassung:

Ort	**Koordinaten**	**Kursgleiche Kurs**	**Entfernung**
San Francisco	37° 49′ N, 122° 25′ W		
		292.7°	1549.16 n.m.
1. Zwischenpunkt	47° 46′ N, 155° W		
		269.5°	1211.81 n.m.
2. Zwischenpunkt	47° 36′ N, 175° O		
		245.5°	1728.51 n.m.
Tokyo	35° 40′ N, 139° 34′ O		



Die Summe der Einzellängen dieser Kursgleichen beträgt 4489.5 Seemeilen. Der Weg des Großkreises ist 4460 Seemeilen lang; Sie sehen, daß durch die Unterteilung in nur drei Teilstrecken die Orthodromenlänge bis auf nur 30 Meilen Differenz erreicht wurde!

23. HÖHE UND AZIMUT EINES HIMMELSKÖRPERS

Dieses Programm berechnet die Höhe (Hc) und das Azimut (Zn) eines Himmelskörpers zu gegebener geographischer Breite des Beobachtungsstandortes (L) und zu den lokalen Werten für Stundenwinkel (LHA) und Deklination (d) des Himmelskörpers. Damit ersetzt dieses Programm eine Reihe nautischer Tafeln (HO-Tafeln).

Formeln:

$$Hc = \sin^{-1} [\sin d \sin L + \cos d \cos L \cos LHA]$$

$$Z = \cos^{-1} \left[\frac{\sin d - \sin L \sin Hc}{\cos L \cos Hc}\right]$$

$$Zn = \begin{cases} Z; \sin LHA < 0 \\ 360\text{-}Z; \sin LHA \geq 0 \end{cases}$$

Anmerkungen:

1. Südliche Breiten und südliche Deklinationen sind negativ einzugeben.
2. Anstatt des Stundenwinkels LHA können Sie auch den Meridianwinkel t eingeben; in diesem Fall sind östliche Meridianwinkel als negative Werte einzugeben.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 00	RCL 0
02	14 04	f SIN
03	24 01	RCL 1
04	14 04	f SIN
05	61	x
06	24 00	RCL 0
07	14 05	f COS
08	24 01	RCL 1
09	14 05	f COS
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	14 05	f COS
13	61	x
14	51	+
15	23 03	STO 3
16	15 04	g SIN^{-1}
17	23 04	STO 4
18	14 00	f →H.MS
19	74	R/S
20	24 01	RCL 1
21	14 04	f SIN
22	24 03	RCL 3
23	24 00	RCL 0
24	14 04	f SIN

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	61	x
26	41	–
27	24 00	RCL 0
28	14 05	f COS
29	71	÷
30	24 04	RCL 4
31	14 05	f COS
32	71	÷
33	15 05	g COS^{-1}
34	24 02	RCL 2
35	14 04	f SIN
36	15 41	g x<0
37	13 45	GTO 45
38	22	R↓
39	03	3
40	06	6
41	00	0
42	21	x⇄y
43	41	–
44	13 00	GTO 00
45	22	R↓
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 L
R_1 d
R_2 LHA
R_3 sin Hc
R_4 Hc
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Berechnen Sie Höhe Hc und Azimut Zn des Mondes, wenn der Stundenwinkel 2°39′54″W und die Deklination 13°51′06″S beträgt. Als geographische Breite wird 33°20′N angenommen.

Lösung:

Hc = 42°44′47″
Zn = 183.5°

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Geben Sie ein:						
	Breite d. Beobachter-Standorts	L, D.MS	g	→H	STO	0	L, Dezimalgrad
	Deklination	d, D.MS	g	→H	STO	1	d, Dezimalgrad
	lokalen Stundenwinkel	LHA, D.MS	g	→H	STO	2	LHA, Dezimalgrad
3	Berechnen Sie die Höhe		f	PRGM	R/S		Hc, D.MS
4	Berechnen Sie das Azimut		R/S				Zn, Dezimalgrad
5	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

24. GROSSKREIS-NAVIGATION

Dieses Programm berechnet zu gegebenen Koordinaten von Ausgangspunkt (φ_1, λ_1) und Zielpunkt (φ_2, λ_2) die Entfernung auf dem Großkreis sowie den anfänglichen Kurs, unter dem vom Ausgangspunkt aus zu starten ist.

Formeln:

$$D = 60 \cos^{-1} [\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)]$$

$$H = \cos^{-1} \left[\frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos(D/60)}{\sin(D/60)\cos\varphi_1} \right]$$

$$H_i = \begin{cases} H & ; \sin(\lambda_2 - \lambda_1) < 0 \\ 360\text{-}H & ; \sin(\lambda_2 - \lambda_1) > 0 \end{cases}$$

Anmerkungen:

1. Südliche Breiten und östliche Längen sind negativ einzugeben.
2. Wenn Start- und Zielpunkt sehr nahe beieinander liegen (1 Meile oder weniger), treten Rundungsfehler auf.
3. Start- und Zielpunkt dürfen nicht auf der Erde genau gegenüber liegende Punkte sein.
4. Verwenden Sie nicht die Breiten $+90°$ oder $-90°$ (Pole).
5. Den Anfangskurs dürfen Sie nicht berechnen, wenn die Orthodrome (Großkreis) mit einem Meridian zusammenfällt ($\lambda_1 = \lambda_2$).

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 00	RCL 0
02	14 04	f SIN
03	24 01	RCL 1
04	14 04	f SIN
05	61	x
06	24 00	RCL 0
07	14 05	f COS
08	24 01	RCL 1
09	14 05	f COS
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	14 05	f COS
13	61	x
14	51	+
15	23 03	STO 3
16	15 05	g COS^{-1}
17	23 04	STO 4
18	06	6
19	00	0
20	61	x
21	74	R/S
22	24 01	RCL 1
23	14 04	f SIN
24	24 00	RCL 0

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	14 04	f SIN
26	24 03	RCL 3
27	61	x
28	41	–
29	24 00	RCL 0
30	14 05	f COS
31	71	÷
32	24 04	RCL 4
33	14 04	f SIN
34	71	÷
35	15 05	g COS^{-1}
36	24 02	RCL 2
37	14 04	f SIN
38	15 41	g $x<0$
39	13 47	GTO 47
40	22	R↓
41	03	3
42	06	6
43	00	0
44	21	x⇄y
45	41	–
46	13 00	GTO 00
47	22	R↓
48	13 00	GTO 00
49		

REGISTERS
R_0 φ_1
R_1 φ_2
R_2 $\lambda_2 - \lambda_1$
R_3 cos (D/60)
R_4 D/60
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Berechnen Sie die Großkreis-Entfernung und den Anfangskurs von San Francisco ($\varphi = 37°49'$ N, $\lambda = 122°25'$ W) nach Tokyo ($\varphi = 35°40'$ N, $\lambda = 139°45'$ O).

Lösung:

D = 4460.04
$H_i = 303.29°$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Geben Sie ein						
	Breite des Startortes	φ1, D.MS	g	→H	STO	0	φ1, Dezimalgrad
	Breite des Zielortes	φ2, D.MS	g	→H	STO	1	φ2, Dezimalgrad
	Länge des Zielortes	λ2, D.MS	g	→H			λ2, Dezimalgrad
	Länge des Startortes	λ1, D.MS	g	→H	–	STO	
			2				λ2 – λ1, Dezimalgrad
3	Berechnen Sie die Großkreisentfernung		f	PRGM	R/S		D, n.m.
4	Berechnen Sie den Anfangskurs		R/S				H_i, Dezimalgrad
5	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

ABSCHNITT 5: NUMERISCHE LÖSUNGSMETHODEN

25. LÖSUNG von f(x)=0 NACH NEWTON

Häufig steht man in der Algebra vor dem Problem, eine Gleichung wie z.B.

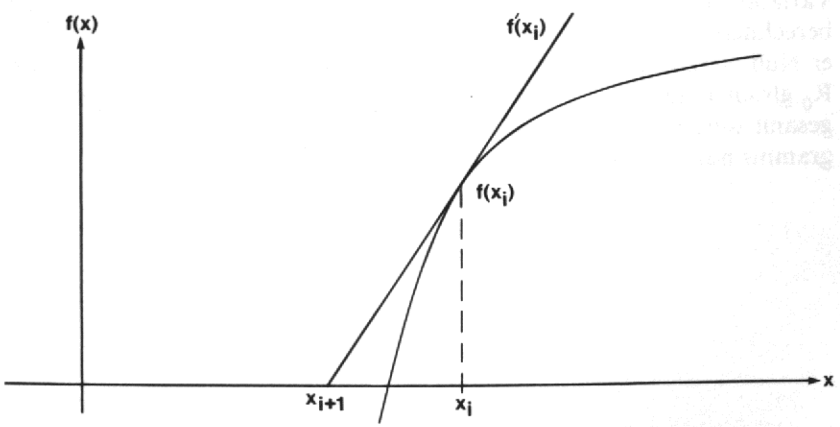
$\ln x + 3x = 10.8074$

zu lösen. Hier ist es nicht ohne weiteres möglich, die Gleichung nach x aufzulösen, um die Unbekannte zu bestimmen; es gibt einfach keine leicht zu bestimmende algebraische Lösung. In solchen Fällen verwendet man ein numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung der Gleichung $f(x) = 0$, wobei $f(x) = \ln x + 3x - 10.8074$. Das folgende Programm verwendet die Newtonsche Methode zur Bestimmung der Nullstelle von $f(x) = 0$, wobei $f(x)$ vom Benutzer gegeben ist.
Der Benutzer muß die zur Berechnung von f(x) nötigen Programmschritte in den Programmspeicher tasten, wobei davon ausgegangen wird, daß der Wert x im X-Register steht. Für die Tastenfolge stehen 14 Programmschritte zur Verfügung. Außerdem können alle Stackregister sowie die Speicherregister R_5 bis R_7 verwendet werden. Dann ist dem Programm ein Schätzwert für x (x_1) vorzugeben. Wenn dieser Schätzwert x_1 nahe bei der tatsächlichen Lösung liegt, wird das Verfahren entsprechend schneller konvergieren. Das Programm bricht die Iteration ab, wenn sich zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte x_i und x_{i+1} um weniger als ε unterscheiden. Der Benutzer hat für diese Genauigkeitsschranke ε einen Wert einzugeben (vernüftig ist z.B. $10^{-6} x_1$).

Formeln:

Die Grundformel zur Berechnung des nächsten Näherungswertes ist beim Newtonschen Verfahren:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Das Programm verwendet für $f'(x_i)$ eine numerische Näherung, so daß sich schließlich folgende Formel ergibt:

$$x_{i+1} = x_i - \delta_i \left[\frac{f(x_i + \delta_i)}{f(x_i)} - 1\right]^{-1}$$

wobei $\delta_i = 10^{-5} x_i$

Anmerkung:

1. Nachdem die Routine die Rechnung beendet hat, kann der letzte Wert von f(x) durch RCL 4 angezeigt werden. Falls dieser Wert nicht nahe genug bei Null liegt, kann das Programm noch einmal mit einem kleineren ε verwendet werden.
2. Sie können die Konvergenz der Funktionswerte gegen Null beobachten, wenn Sie eine kleine Änderung im Programm durchführen. Wenn Sie den Schritt g NOP in Zeile 07 durch f PAUSE ersetzen, hält das Programm jeweils zur Anzeige von f(x) kurzfristig an. Um diese Änderung durchzuführen, wenn Sie das Programm bereits eingetastet haben:
   1. Drücken Sie GTO 0 6
   2. Schalten Sie in Stellung PRGM
   3. Drücken Sie f PAUSE
   4. Schalten Sie zurück in Stellung RUN
   5. Drücken Sie f PRGM

Anmerkung zum Programm:

Dies ist eins der komplizierteren Programme in dieser Sammlung. Die Schwierigkeit ist die, daß innerhalb der Schleife sowohl f(x) als auch f'(x) berechnet werden müssen, die Tastenfolge für f(x) aber nur einmal im Speicher steht. Große Computer lösen dieses Problem über ein Unterprogramm. Hier ist etwas ähnliches realisiert, indem in R_0 eine Variable gespeichert ist, die nur die Werte 0 bzw. 1 annehmen kann (Boolsche Variable). Ist $r_0 = 0$ gesetzt, wird f(x) berechnet; falls $r_0 = 1$, ist $f(x+\delta)$ zu berechnen. Nach Berechnung von f wird der Inhalt von R_0 geprüft; ist er Null, verzweigt das Programm und speichert f(x). Ist der Inhalt von R_0 gleich 1, setzt das Programm die Berechnung mit $f(x+\delta)$ fort. Insgesamt werden für diese Variable und ihren Einsatz innerhalb des Programms nur 9 Programmschritte belegt.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
00							
01	34	CLX	0				Set flag to 0 for f(x)
02	23 00	STO 0	0				
03	24 01	RCL 1	x	0			Recall x and branch to
04	13 17	GTO 17	x	0			calculate f(x)
05	22	R↓	f(x)				Roll down to remove flag
06	23 04	STO 4	f(x)				
07	15 74	g NOP	f(x)				May Pause to see convergence
08	01	1	1	f(x)			Set flag to 1 for f(x + δ)
09	23 00	STO 0	1	f(x)			
10	24 01	RCL 1	x	1	f(x)		
11	24 01	RCL 1	x	x	1	f(x)	
12	33	EEX	1. 00	x	x	1	
13	05	5	1. 05	x	x	1	
14	71	÷	10^{-5} x	x	1	1	
15	23 03	STO 3	δ	x	1	1	
16	51	+	x + δ	1	1	1	
17							Lines 17 through 30 are
18							reserved for user
19							to define f(x)
20							
21							This section of pgm is
22							used to find f(x) and
23							f(x + δ). Flag in R_0 is
24							0 for f(x), 1 for
25							f(x + δ)
26							
27							
28							
29							
30							
31	15 71	g x = 0	f(x)/(x + δ)				Is function value = 0?
32	13 49	GTO 49	f(x)/(x + δ)				Yes, output solution
33	24 00	RCL 0	Flag	f(x)/(x + δ)			No, check flag
34	15 71	g x = 0	Flag	f(x)/(x + δ)			Flag = 0?
35	13 05	GTO 05	Flag	f(x)			Yes, have f(x)
36	22	R↓	f(x + δ)			Flag	No, flag = 1, have f(x + δ)
37	24 04	RCL 4	f(x)	f(x + δ)			
38	71	÷	R				R = f(x + δ)/f(x)
39	01	1	1	R			
40	41	–	R – 1				R–1 = [f(x+δ) – f(x)] /f(x)
41	15 22	g 1/x	$(R-1)^{-1}$				Approximate:
42	24 03	RCL 3	δ	$(R-1)^{-1}$			$f'(x) = [f(x+\delta) - f(x)]/\delta$
43	61	x	δ/(R – 1)				$\Delta = f(x)/f'(x)$
44	23 41 01	STO – 1	Δ				$x_{i+1} = x_i - \Delta$
45	15 03	g ABS	|Δ|				
46	24 02	RCL 2	ε	|Δ|			
47	14 41	f x<y	ε	|Δ|			$\|x_{i+1} - x_i\| > \epsilon$?
48	13 01	GTO 01	ε	|Δ|			Yes, iterate again
49	24 01	RCL 1	x	ε	|Δ|		No, display x and halt

REGISTERS	
R_0	Flag
R_1	x
R_2	ε
R_3	δ
R_4	f(x)
R_5	
R_6	
R_7	

Beispiel:

Eine im Zusammenhang mit dem Entwurf von Getrieben häufig gelöste Gleichung ist

$\tan x - x - I = 0$

wobei x ein Winkel im Bogenmaß und I die Involute von x ist. Berechnen Sie den Winkel x_0 zu $I = 0.0324$.

Anmerkung:

Da ein Getriebefachmann die Gleichung sicherlich für mehrere Werte von I lösen will, ist es sinnvoll, den Wert I in R_7 zu speichern und innerhalb der Tastenfolge für f(x) zurückzurufen.

Lösung:

$x_0 = 25.62°$
$f(x_0) = 0$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Zeilen 1–16 des Programms eintasten						16 51
2	Schrittfolge für f (x) = tan x –						
	x – I eintasten		f	TAN			17 14 06
			f	LASTx			18 14 73
			–				19 41
			RCL	7			20 24 07
			–				21 41
3	Sprung nach Zeile 31		GTO	31			22 13 31
4	Drücken Sie 8 mal SST, bis						
	Zeile 30 angezeigt wird.						
5	Tasten Sie Zeile 31–49 ein						49 24 01
6	Schalten Sie in Stellung RUN						
7	Wählen Sie Winkel-Modus		g	RAD			
8	Speichern Sie I	.0324	STO	7			
9	Schätzwert $x_1 = 1$	1	STO	1			
10	Genauigkeitsschranke $= 10^{-6}$	10^{-6}	STO	2			
11	Berechnen Sie die Lösung		f	PRGM	R/S		0.45
12	Wandeln Sie Winkel in Grad		180	×	g	π	
	um		÷				25.62
13	Zeigen Sie letzten f (x) an		RCL	4			0.00

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Zeilen 1–16 des Programms eintasten						16 51
2	f(x) eintasten						
3	Sprung nach Zeile 31 eintasten		GTO	31			
4	Drücken Sie SST, bis Zeile 30						
	angezeigt wird						
5	Tasten Sie Zeile 31–49 ein						
6	Schalten Sie in Stellung RUN						
7	Schätzwert x1 eingeben	x_1	STO	1			
8	Genauigkeitsschranke eingeben	ϵ	STO	2			
9	Ergebnis berechnen		f ▾	PRGM	R/S		x_0
10	Zur Änderung von x1 oder gehen Sie zum entsprechen-						
	den Schritt und speichern Sie die neuen Werte.						

26. SIMPSONSCHE REGEL FÜR NUMERISCHE INTEGRATION

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ seien Punkte gleichen Abstands $(x_i = x_0 + ih)$, für die die Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ einer Funktion $f(x)$ bekannt sind. Die Funktion selbst muß nicht in expliziter Form gegeben sein; das heißt, es genügt, wenn diese einzelnen Funktionswerte gegeben sind. Falls $f(x)$ aber in expliziter Form vorliegt, können Sie die Funktion programmieren und die benötigten Werte leicht berechnen. Der Wert n muß eine positive gerade Zahl sein.

Die Simpsonsche Regel lautet:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2})$$

$$+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Die Lösung sei mit I bezeichnet.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 00	RCL 0
02	03	3
03	71	÷
04	23 00	STO 0
05	61	x
06	23 01	STO 1
07	74	R/S
08	24 00	RCL 0
09	61	x
10	24 01	RCL 1
11	51	+
12	23 01	STO 1
13	74	R/S
14	24 00	RCL 0
15	61	x
16	04	4
17	61	x
18	24 01	RCL 1
19	51	+
20	23 01	STO 1
21	74	R/S
22	24 00	RCL 0
23	61	x
24	02	2

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	61	x
26	24 01	RCL 1
27	51	+
28	23 01	STO 1
29	13 13	GTO 13
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 h/3
R_1 Σ
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Berechnen Sie $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$ nach dem Simpsonschen Verfahren mit $h = \pi/8$.

Zuerst sind die folgenden Daten zu berechnen:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$f(x_i)$	0	0.1464	0.5	0.8536	1	0.8536	0.5	0.1464	0

Lösung:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = 1.5708$$

Das exakte Ergebnis ist $\pi/2$.

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Inkrement speichern	h	STO	0			
3	Ersten Funktionswert eingeben	$f(x_0)$	f	PRGM	R/S		Partialsumme
4	Letzten Funktionswert eingeben	$f(x_n)$	R/S				Partialsumme
5	Geben Sie die Werte ein für i=1, 2, ..., n−2	$f(x_i)$	R/S				Partialsumme
6	Geben Sie den Wert für i=n−1 ein	$f(x_{n-1})$	R/S				I

27. DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG

Mit Hilfe dieses Programms können eine Vielzahl von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$y' = f(x, y)$

mit den Anfangswerten x_0, y_0 gelöst werden. Das Ergebnis ist eine numerische Lösung; berechnet werden y_i für $x_i = x_0 + ih$, wobei h ein vom Benutzer festzulegendes Inkrement ist. Für i gilt $i = 1, 2, \ldots$

Das Programm verwendet eine modifizierte Eulersche Methode:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i) \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})\right]$$

f(x, y) ist ab Zeile 18 in den Programmspeicher zu tasten. Dazu stehen dem Benutzer 13 Programmschritte und die Register R_5 bis R_7 zur Verfügung. Beim Erstellen der Routine für f(x, y) ist davon auszugehen, daß x und y in den entsprechenden Registern X und Y stehen. Am Ende der Routine muß f(x, y) im X-Register stehen. Die Tastenfolge für f(x, y) ist mit GTO 3 1 zu beenden.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	34	CLX
02	23 04	STO 4
03	24 02	RCL 2
04	24 01	RCL 1
05	13 18	GTO 18
06	22	R↓
07	23 03	STO 3
08	24 00	RCL 0
09	61	x
10	24 02	RCL 2
11	51	+
12	24 01	RCL 1
13	24 00	RCL 0
14	51	+
15	01	1
16	23 04	STO 4
17	22	R↓
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31	24 04	RCL 4
32	15 71	g x=0
33	13 06	GTO 06
34	22	R↓
35	24 03	RCL 3
36	51	+
37	24 00	RCL 0
38	61	x
39	02	2
40	71	÷
41	24 02	RCL 2
42	51	+
43	23 02	STO 2
44	24 01	RCL 1
45	24 00	RCL 0
46	51	+
47	23 01	STO 1
48	14 74	f PAUSE
49	22	x⇄y

REGISTERS
R_0 h
R_1 x
R_2 y
R_3 y'
R_4 Flag
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Lösen Sie nach dem hier vorgestellten Verfahren die Differentialgleichung $y' = x\sqrt{y}$ mit den Anfangswerten $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Verwenden Sie als Schrittweite $h = 0.1$.

Lösung:

Tasten Sie die Funktion ein als: x⇄y f √x ×.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y (nach Programm)	1.0	1.1077	1.2319	1.3745	1.5372	1.7221
y (exakt)	1.0	1.1078	1.2321	1.3748	1.5376	1.7227

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Tasten Sie die Zeilen 1–17 des Programms ein						17 22
2	Tasten Sie f (x, y) ein						
3	Tasten Sie einen Sprungbefehl nach Zeile 31 ein		GTO	31			
4	Tasten Sie SST, bis Zeile						
	30 angezeigt wird						
5	Tasten Sie die Zeilen 31–49 des Programms ein						49 13 01
6	Schalten Sie in Stellung RUN						
7	Inkrement speichern	h	STO	0			
8	Anfangswerte speichern	x_0	STO	1			
		y_0	STO	2	f	PRGM	
9	Zeigen Sie nächsten x-Wert						
	und zugehörigen y-Wert an.		R/S				(x_k)
							y_k
10	Wiederholen Sie 9 nach Belieben						

28. LINEARE INTERPOLATION

Wenn (x_1, $f(x_1)$) und (x_2, $f(x_2)$) zwei Punkte einer Funktion f(x) sind, kann der Funktionswert an der Stelle x_0 näherungsweise durch die folgende Interpolation bestimmt werden:

$$f(x_0) \cong \frac{(x_2-x_0)\, f(x_1) + (x_0-x_1)\, f(x_2)}{(x_2-x_1)}$$

Diese Formel wird lineare Interpolationsformel genannt. Natürlich müssen x_1 und x_2 verschieden sein.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	23 04	STO 4
02	24 00	RCL 0
03	41	−
04	24 03	RCL 3
05	61	×
06	24 02	RCL 2
07	24 04	RCL 4
08	41	−
09	24 01	RCL 1
10	61	×
11	51	+
12	24 02	RCL 2
13	24 00	RCL 0
14	41	−
15	71	÷
16	13 00	GTO 00
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 x_1
R_1 $f(x_1)$
R_2 x_2
R_3 $f(x_2)$
R_4 x_0
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Gegeben sind $f(7.3) = 1.9879$
$f(7.4) = 2.0015$

Berechnen Sie nach der linearen Interpolationsmethode $f(7.37)$.

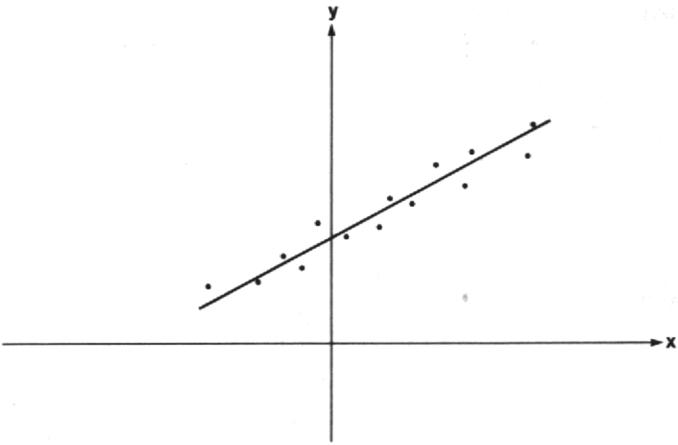
Lösung:

$f(7.37) = 1.9974$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Ersten Punkt speichern	x_1	STO	0			
		$f(x_1)$	STO	1			
3	Zweiten Punkt speichern	x_2	STO	2			
		$f(x_2)$	STO	3	f	PRGM	
4	Geben Sie x_0 ein, berechnen Sie $f(x_0)$	x_0	R/S				$f(x_0)$
5	Wiederholen Sie 4 für						
	beliebig viele x-Werte.						

ABSCHNITT 6: STATISTIK

29. LINEARE REGRESSION



Der erste Schritt bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen besteht in der Sammlung von Wertpaaren (x, y). Dann taucht die Frage auf, welche mathematische Gleichung den Zusammenhang zwischen x und y wohl am besten beschreibt. Die erste Vermutung ist oft, daß ein linearer Zusammenhang besteht, d.h., daß sich die Beziehung durch die Gleichung $y = a_1 x + a_0$ ausdrücken läßt, wobei a_1 und a_0 Konstanten sind.

Dieses Programm dient zur Berechnung der Konstanten a_1 und a_0, die die beste Annäherung der Formel $y = a_1 x + a_0$ an die experimentellen Daten liefern. Das Verfahren nennt man lineare Regression. Es arbeitet nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Der Benutzer muß die Datenpaare (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, eingeben. Anschließend können die Konstanten a_1 und a_0 berechnet werden. Außerdem kann ein dritter Wert, das sogenannte Bestimmtheitsmaß r^2 errechnet werden. Dieser Wert liegt zwischen 0 und 1 und ist ein Maß für die Güte der Anpassung: sie ist umso besser, je näher r^2 bei 1 liegt.

Formeln:

$y = a_1 x + a_0$

Alle nachstehenden Summationen werden für $i = 1, 2, \ldots, n$ ausgeführt.

Regressionskonstanten:

$$a_1 = \frac{\Sigma xy - \dfrac{\Sigma x\, \Sigma y}{n}}{\Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\, \overline{x}$$

wobei $\overline{y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$ und

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

Bestimmtheitsmaß: $$r^2 = \frac{\left[\Sigma xy - \dfrac{\Sigma x \Sigma y}{n}\right]^2}{\left[\Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{n}\right]\left[\Sigma y^2 - \dfrac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}$$

Anmerkung:

Die Werte für a_0 und a_1 werden in R_0 und R_1 gespeichert. Auf diese Weise kann nach Berechnung von a_1, a_0 und r^2 der Schätzwert $\hat{y}$ zu einem beliebigen x-Wert nach $\hat{y} = a_1\, x + a_0$ berechnet werden.

Anmerkung zum Programm:

Der Zwischenwert $C = \Sigma xy - (\Sigma x\, \Sigma y/n)$ wird zuerst in Zeile 14 berechnet, dann aber noch einmal im hintern Teil des Programms benötigt. Da alle Speicherregister (R_0 bis R_7) belegt sind, kann dieser Wert nur noch im Stack selbst gespeichert werden. Deshalb steht C ab Zeile 14 in einem oder mehreren der Stackregister, bis es zuletzt in Zeile 36 benötigt wird. Aus diesem Grund dürfen auch nach der Berechnung von a_1 und a_0 (siehe Bedienungsanweisung) die Stackinhalte nicht verändert werden.

DISPLAY		KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
LINE	CODE						
00			y	x			Steps 1-7 for summation
01	31	↑	y	y	x		
02	15 02	g x^2	y^2	y	x		
03	23 51 02	STO + 2	y^2	y	x		Σy^2
04	22	R↓	y	x		y^2	
05	21	x⇄y	x	y		y^2	
06	25	Σ+	n	y		y^2	n, Σy, Σxy, Σx^2, Σx
07	13 00	GTO 00	n	y		y^2	
08	24 05	RCL 5	Σxy				
09	24 07	RCL 7	Σx	Σxy			
10	24 04	RCL 4	Σy	Σx	Σxy		
11	61	×	$\Sigma x\, \Sigma y$	Σxy			
12	24 03	RCL 3	n	$\Sigma x\, \Sigma y$	Σxy		
13	71	÷	$\Sigma x\, \Sigma y/n$	Σxy			
14	41	−	C				$C = \Sigma xy - (\Sigma x\, \Sigma y/n)$
15	24 06	RCL 6	Σx^2	C			
16	24 07	RCL 7	Σx	Σx^2	C		
17	15 02	g x^2	$(\Sigma x)^2$	Σx^2	C		
18	24 03	RCL 3	n	$(\Sigma x)^2$	Σx^2	C	
19	71	÷	$(\Sigma x)^2/n$	Σx^2	C	C	
20	41	−	D	C	C	C	$D = \Sigma x^2 - [(\Sigma x)^2/n]$
21	71	÷	a_1	C	C	C	$a_1 = C/D$
22	23 01	STO 1	a_1	C	C	C	
23	24 07	RCL 7	Σx	a_1	C	C	
24	61	×	$a_1\, \Sigma x$	C	C	C	
25	32	CHS	$-a_1\, \Sigma x$	C	C	C	
26	24 04	RCL 4	Σy	$-a_1\, \Sigma x$	C	C	
27	51	+	$\Sigma y - a_1\, \Sigma x$	C	C	C	
28	24 03	RCL 3	n	$\Sigma y - a_1\, \Sigma x$	C	C	
29	71	÷	a_0	C	C	C	$a_0 = \bar{y} - a_1\, \bar{x}$
30	23 00	STO 0	a_0	C	C	C	
31	74	R/S	a_0	C	C	C	Halt to display a_0
32	24 01	RCL 1	a_1	a_0	C	C	
33	74	R/S	a_1	a_0	C	C	Halt to display a_1
34	21	x⇄y	a_0	a_1	C	C	
35	22	R↓	a_1	C	C	a_0	
36	61	×	a_1 C	C	a_0	a_0	
37	24 02	RCL 2	Σy^2	a_1 C	C	a_0	
38	24 04	RCL 4	Σy	Σy^2	a_1 C	C	
39	15 02	g x^2	$(\Sigma y)^2$	Σy^2	a_1 C	C	
40	24 03	RCL 3	n	$(\Sigma y)^2$	Σy^2	a_1 C	
41	71	÷	$(\Sigma y)^2/n$	Σy^2	a_1 C	a_1 C	
42	41	−	E	a_1 C	a_1 C	a_1 C	$E = \Sigma y^2 - [(\Sigma y)^2/n]$
43	71	÷	r^2	a_1 C	a_1 C	a_1 C	$r^2 = a_1\, C/E$
44	13 00	GTO 00	r^2	a_1 C	a_1 C	a_1 C	
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTERS	
R_0	a_0
R_1	a_1
R_2	Σy^2
R_3	n
R_4	Σy
R_5	Σxy
R_6	Σx^2
R_7	Σx

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG	f	PRGM	
3	Geben Sie für $i=1, \ldots, n$						
	jeweils x- und y-Wert ein	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Berechnen Sie die		GTO	08	R/S		a_0 *
	Regressionskonstanten		R/S				a_1 *
5	Bestimmtheitsmaß						
	berechnen		R/S				r^2
6	Zur Berechnung eines						
	Schätzwertes $\hat{y}$, geben	x	RCL	1	x	RCL	
	Sie x ein		0	+			$\hat{y}$
7	Wiederholen Sie 6 beliebig						
	oft						
8	Für eine neue Rechnung,						
	gehen Sie nach 2.						
	(* An diesen Stellen darf						
	der Stackinhalt nicht						
	geändert werden.)						

Beispiel:

Ein exzentrischer Numerikprofessor wacht eines Morgens mit einer leichten Erkältung auf. Er kramt den Medizinschrank um und findet schließlich ein Fieberthermometer. Leider ist es in °C geeicht, einer Einheit, die der gute Professor nicht gewohnt ist. Wie er so trübsinnig zum Fenster hinaussieht, fällt sein Blick auf ein in °F geeichtes Außenthermometer. Das ist zwar zu groß um es in den Mund zu stecken, aber... (der Genius beginnt zu grübeln). Nach kurzem Überlegen nimmt unser Professor an, daß ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Temperatureinheiten besteht und beschließt, diesen Zusammenhang mittels einer linearen Regression zu ermitteln. Er taucht beide Thermometer in eine Schüssel mit verschieden temperiertem Wasser und notiert sich die Anzeigen beider Thermometer:

C	40.5	38.6	37.9	36.2	35.1	34.6
F	104.5	102	100	97.5	95.5	94

Berechnen Sie, unter der Annahme, daß tatsächlich ein linearer Zusammenhang besteht, die Konstanten a_1 und a_0 der Gleichung $F = a_1 C + a_0$. Wie groß ist das Bestimmtheitsmaß r^2?

Lösung:

[f] [PRGM] [f] [REG] 40.5 [↑] 104.5 [R/S] →	1.00
38.6 [↑] 102 [R/S] →	2.00
37.9 [↑] 100 [R/S] →	3.00
36.2 [↑] 97.5 [R/S] →	4.00
35.1 [↑] 95.5 [R/S] →	5.00
34.6 [↑] 94 [R/S] →	6.00
[GTO] [0] [8] [R/S] →	33.53
[R/S] →	1.76
[R/S] →	0.99

Nach den berechneten Daten besteht also folgender Zusammenhang: $F = 1.76\,C + 33.53$, mit $r^2 = 0.99$. (Die tatsächliche Beziehung lautet natürlich $F = 1.8\,C + 32$.)
Jetzt steckt sich der Professor das Fieberthermometer in den Mund und liest 37° C ab. Wieviel °F sind das?

Lösung:

37 [RCL] [1] [×] [RCL] [0] [+] →	98.65°F

30. EXPONENTIAL-KURVENANPASSUNG

Dieses Programm errechnet die Anpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate an n Datenpaare $[(x_i, y_i), i=1, 2, \ldots, n]$ mit $y_i>0$, mittels einer Exponentialfunktion der Form

$y = a\,e^{bx}$ $(a>0)$

Die Gleichung wird wie folgt linearisiert:

$\ln y = \ln a + bx$

Folgende statistische Größen werden berechnet:

1. Die Koeffizienten a, b:

$$b = \frac{\Sigma x_i \ln y_i - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)(\Sigma \ln y_i)}{\Sigma x_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)^2}$$

$$a = \exp\left[\frac{\Sigma \ln y_i}{n} - b\,\frac{\Sigma x_i}{n}\right]$$

2. Das Bestimmtheitsmaß

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma x_i \ln y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i\,\Sigma \ln y_i\right]^2}{\left[\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma(\ln y_i)^2 - \frac{(\Sigma \ln y_i)^2}{n}\right]}$$

3. Der Schätzwert $\hat{y}$ bei gegebenem x

$\hat{y} = a\,e^{bx}$

Anmerkung:

n ist positiv, ganzzahlig und $n \neq 1$.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	14 07	f LN
02	31	↑
03	15 02	g x^2
04	23 51 02	STO + 2
05	22	R↓
06	21	x⇄y
07	25	Σ+
08	13 00	GTO 00
09	24 05	RCL 5
10	24 07	RCL 7
11	24 04	RCL 4
12	61	x
13	24 03	RCL 3
14	71	÷
15	41	–
16	24 06	RCL 6
17	24 07	RCL 7
18	15 02	g x^2
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	41	–
22	71	÷
23	23 01	STO 1
24	24 07	RCL 7

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	61	x
26	32	CHS
27	24 04	RCL 4
28	51	+
29	24 03	RCL 3
30	71	÷
31	15 07	g e^x
32	23 00	STO 0
33	74	R/S
34	24 01	RCL 1
35	74	R/S
36	21	x⇄y
37	22	R↓
38	61	x
39	24 02	RCL 2
40	24 04	RCL 4
41	15 02	g x^2
42	24 03	RCL 3
43	71	÷
44	41	–
45	71	÷
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 a
R_1 b
R_2 $\Sigma (\ln y)^2$
R_3 n
R_4 $\Sigma \ln y$
R_5 $\Sigma x \ln y$
R_6 Σx^2
R_7 Σx

Beispiel:

x_i	.72	1.31	1.95	2.58	3.14
y_i	2.16	1.61	1.16	.85	0.5

Lösungen:

$a = 3.45$, $b = -.58$
$y = 3.45\,e^{-0.58\,x}$
$r^2 = .98$
Für $x = 1.5$, $y = 1.44$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG	f	PRGM	
3	Geben Sie für i=1, ..., n						
	je einen x- und y-Wert ein	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Berechnen Sie die		GTO	09	R/S		a*
	Konstanten		R/S				b*
5	Bestimmtheitsmaß						
	berechnen		R/S				r^2
6	Zur Berechnung von $\hat{y}$,	x	RCL	1	x	g	
	geben Sie x ein		e^x	RCL	0	x	$\hat{y}$
7	Wiederholen Sie 6 beliebig						
	oft						
8	Für eine neue Rechnung,						
	gehen Sie nach 2.						
	(* Der Stackinhalt darf an						
	diesen Stellen nicht geändert werden)						

31. LOGARITHMISCHE KURVENANPASSUNG

Dieses Programm paßt die logarithmische Funktion

$y = a + b \ln x$

einer gegebenen Datenmenge

$\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$

an wobei $x_i > 0$.

Das Programm berechnet:

1. die Regressionskoeffizienten

$$b = \frac{\Sigma\, y_i \ln x_i - \frac{1}{n}\, \Sigma \ln x_i\, \Sigma\, y_i}{\Sigma\, (\ln x_i)^2 - \frac{1}{n}\, (\Sigma \ln x_i)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\, (\Sigma\, y_i - b\, \Sigma \ln x_i)$$

2. das Bestimmtheitsmaß

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma\, y_i \ln x_i - \frac{1}{n} \Sigma \ln x_i\, \Sigma\, y_i\right]^2}{\left[\Sigma\, (\ln x_i)^2 - \frac{1}{n}\, (\Sigma \ln x_i)^2\right] \left[\Sigma y_i^2 - \frac{1}{n}\, (\Sigma\, y_i)^2\right]}$$

3. den Schätzwert y bei gegebenem x

   $\hat{y} = a + b \ln x$

Anmerkung:

n ist positiv, ganzzahlig und $n \neq 1$.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	23 51 02	STO + 2
04	22	R↓
05	21	x⇄y
06	14 07	f LN
07	25	Σ+
08	13 00	GTO 00
09	24 05	RCL 5
10	24 07	RCL 7
11	24 04	RCL 4
12	61	x
13	24 03	RCL 3
14	71	÷
15	41	–
16	24 06	RCL 6
17	24 07	RCL 7
18	15 02	g x^2
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	41	–
22	71	÷
23	23 01	STO 1
24	24 07	RCL 7

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	61	x
26	32	CHS
27	24 04	RCL 4
28	51	+
29	24 03	RCL 3
30	71	÷
31	23 00	STO 0
32	74	R/S
33	24 01	RCL 1
34	74	R/S
35	21	x⇄y
36	22	R↓
37	61	x
38	24 02	RCL 2
39	24 04	RCL 4
40	15 02	g x^2
41	24 03	RCL 3
42	71	÷
43	41	–
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 a
R_1 b
R_2 Σy^2
R_3 n
R_4 Σy
R_5 $\Sigma y \ln x$
R_6 $\Sigma \ln x$
R_7 $\Sigma (\ln x)^2$

Beispiel:

x_i	3	4	6	10	12
y_i	1.5	9.3	23.4	45.8	60.1

Lösung:

$a = -47.02$, $b = 41.39$
$y = -47.02 + 41.39 \ln x$
$r^2 = .98$
Für $x = 8$, $\hat{y} = 39.06$
Für $x = 14.5$, $\hat{y} = 63.67$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG	f	PRGM	
3	Geben Sie für i=1, . . . , n						
	je einen x- und y-Wert ein	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Konstanten berechnen		GTO	09	R/S		a*
			R/S				b*
5	Bestimmtheitsmaß						
	berechnen		R/S				r^2
6	Zur Berechnung von $\hat{y}$,	x	f	ln	RCL	1	
	geben Sie x ein		x	RCL	0	+	$\hat{y}$
7	Wiederholen Sie 6 beliebig						
	oft						
8	Für eine neue Rechnung,						
	gehen Sie nach 2.						
	(* Der Stackinhalt darf an						
	diesen Stellen nicht geändert werden.)						

32. KURVENANPASSUNG EINER POTENZFUNKTION

Dieses Programm paßt die Potenzfunktion

$y = ax^b \quad (a > 0)$

einer gegebenen Datenmenge

$\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$

an, wobei $x_i > 0$, $y_i > 0$.

Das Problem kann auf die Lösung einer linearen Regression zurückgeführt werden, indem man die Gleichung wie folgt transformiert:

$\ln y = b \ln x + \ln a$

Das Programm errechnet:

1. die Regressionskoeffizienten

$$b = \frac{\Sigma (\ln x_i)(\ln y_i) - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)(\Sigma \ln y_i)}{n}}{\Sigma (\ln x_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)^2}{n}}$$

$$a = \exp\left[\frac{\Sigma \ln y_i}{n} - b\,\frac{\Sigma \ln x_i}{n}\right]$$

2. das Bestimmtheitsmaß

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma (\ln x_i)(\ln y_i) - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)(\Sigma \ln y_i)}{n}\right]^2}{\left[\Sigma (\ln x_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma (\ln y_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln y_i)^2}{n}\right]}$$

3. den Schätzwert zu gegebenem x

$\hat{y} = ax^b$

Anmerkung:

n ist positiv, ganzzahlig und $n \neq 1$.

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	14 07	f LN
02	31	↑
03	15 02	g x^2
04	23 51 02	STO + 2
05	22	R↓
06	21	x⇄y
07	14 07	f LN
08	25	Σ+
09	13 00	GTO 00
10	24 05	RCL 5
11	24 07	RCL 7
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	24 03	RCL 3
15	71	÷
16	41	–
17	24 06	RCL 6
18	24 07	RCL 7
19	15 02	g x^2
20	24 03	RCL 3
21	71	÷
22	41	–
23	71	÷
24	23 01	STO 1

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	24 07	RCL 7
26	61	x
27	32	CHS
28	24 04	RCL 4
29	51	+
30	24 03	RCL 3
31	71	÷
32	15 07	g e^x
33	23 00	STO 0
34	74	R/S
35	24 01	RCL 1
36	74	R/S
37	21	x⇄y
38	22	R↓
39	61	x
40	24 02	RCL 2
41	24 04	RCL 4
42	15 02	g x^2
43	24 03	RCL 3
44	71	÷
45	41	–
46	71	÷
47	13 00	GTO 00
48		
49		

REGISTERS
R_0 a
R_1 b
R_2 $\Sigma (\ln y)^2$
R_3 n
R_4 $\Sigma \ln y$
R_5 $\Sigma (\ln x)(\ln y)$
R_6 $\Sigma (\ln x)^2$
R_7 $\Sigma \ln x$

Beispiel:

x_i	10	12	15	17	20	22	25	27	30	32	35
y_i	0.95	1.05	1.25	1.41	1.73	2.00	2.53	2.98	3.85	4.59	6.02

Lösung:

$a = .03$, $b = 1.46$
$y = .03x^{1.46}$
$r^2 = .94$
Für $x = 18$, $\hat{y} = 1.76$
$x = 23$, $\hat{y} = 2.52$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG	f	PRGM	
3	Geben Sie für i=1, ..., n						
	je einen x- und y-Wert ein	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Konstanten berechnen		GTO	10	R/S		a*
			R/S				b*
5	Bestimmtheitsmaß						
	berechnen		R/S				r^2
6	Zur Berechnung von $\hat{y}$,	x	RCL	1	f	y^x	
	geben Sie x ein		RCL	0	x		$\hat{y}$
7	Wiederholen Sie 6 beliebig						
	oft.						
8	Für eine neue Rechnung,						
	gehen Sie nach 2.						
	(* Der Stackinhalt darf an						
	dieser Stelle nicht geändert werden.)						

33. KOVARIANZ UND KORRELATIONSKOEFFIZIENT

Für eine gegebene Datenmenge $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$ ist die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient wie folgt definiert:

Kovarianz $$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right)$$

oder $$s_{xy}' = \frac{1}{n}\left(\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right)$$

Korrelationskoeffizient $$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

wobei s_x und s_y die folgenden Standardabweichungen sind:

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}{n-1}} \qquad s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2/n}{n-1}}$$

Anmerkung:

$-1 \leqslant r \leqslant 1$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	23 51 02	STO + 2
04	22	R↓
05	21	x⇄y
06	25	Σ+
07	13 00	GTO 00
08	24 05	RCL 5
09	24 04	RCL 4
10	24 07	RCL 7
11	61	x
12	24 03	RCL 3
13	71	÷
14	41	–
15	24 03	RCL 3
16	01	1
17	41	–
18	23 00	STO 0
19	71	÷
20	23 01	STO 1
21	74	R/S
22	24 00	RCL 0
23	61	x
24	24 03	RCL 3

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	71	÷
26	74	R/S
27	14 22	f s
28	23 71 01	STO ÷ 1
29	24 02	RCL 2
30	24 04	RCL 4
31	15 02	g x^2
32	24 03	RCL 3
33	71	÷
34	41	–
35	24 00	RCL 0
36	71	÷
37	14 02	f $\sqrt{x}$
38	23 71 01	STO ÷ 1
39	24 01	RCL 1
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 n – 1
R_1 belegt
R_2 Σy^2
R_3 n
R_4 Σy
R_5 Σxy
R_6 Σx^2
R_7 Σx

Beispiel:

x_i	26	30	44	50	62	68	74
y_i	92	85	78	81	54	51	40

Lösung:

$s_{xy} = -354.14$
$s'_{xy} = -303.55$
$r = -0.96$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM	f	REG	
3	Wiederholen Sie diesen	x_i	↑				
	Schritt für i=1, 2, ..., n	y_i	R/S				i
4	Kovarianz s_{xy} berechnen		GTO	08	R/S		s_{xy}
5	s'_{xy} berechnen		R/S				s'_{xy}
6	Korrelationskoeffizient berechnen		R/S				r
7	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

34. MOMENTE UND SCHIEFE

Dieses Programm berechnet die folgenden Maßzahlen für eine gegebene Datenmenge $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1. (gewöhnliches) Moment $\quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

2. (zentrales) Moment $\quad m_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$

3. (zentrales) Moment $\quad m_3 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^3 - \frac{3}{n} \bar{x}\, \Sigma x_i^2 + 2\bar{x}^3$

Schiefe $\quad \gamma_1 = \dfrac{m_3}{m_2^{\,3/2}}$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	25	Σ+
04	13 00	GTO 00
05	24 04	RCL 4
06	24 03	RCL 3
07	71	÷
08	23 02	STO 2
09	74	R/S
10	24 07	RCL 7
11	24 03	RCL 3
12	71	÷
13	24 02	RCL 2
14	15 02	g x^2
15	41	–
16	23 01	STO 1
17	74	R/S
18	24 05	RCL 5
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	24 07	RCL 7
22	24 02	RCL 2
23	61	x
24	24 03	RCL 3

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	71	÷
26	03	3
27	61	x
28	41	–
29	24 02	RCL 2
30	31	↑
31	15 02	g x^2
32	61	x
33	02	2
34	61	x
35	51	+
36	23 00	STO 0
37	74	R/S
38	24 00	RCL 0
39	24 01	RCL 1
40	01	1
41	73	·
42	05	5
43	14 03	f y^x
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 m_3
R_1 m_2
R_2 $\bar{x}$
R_3 n
R_4 Σx
R_5 Σx^3
R_6 Σx^4
R_7 Σx^2

Beispiel:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2.1	3.5	4.2	6.5	4.1	3.6	5.3	3.7	4.9

Lösung:

$\overline{x} = 4.21$
$m_2 = 1.29$
$m_3 = .39$
$\gamma_1 = .24$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM	f	REG	
3	Geben Sie für i=1, 2, . . ., n						
	x-Werte ein	x_i	R/S				i
4	Heben Sie falsch einge-	x_k	↑	g	x^2	f	
	gebene Werte auf.		Σ–				
5	Berechnen Sie $\overline{x}$		GTO	05	R/S		$\overline{x}$
6	Berechnen Sie 2. und						
	3. Moment		R/S				m_2
			R/S				m_3
7	Berechnen Sie die Schiefe						
			R/S				γ_1
8	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

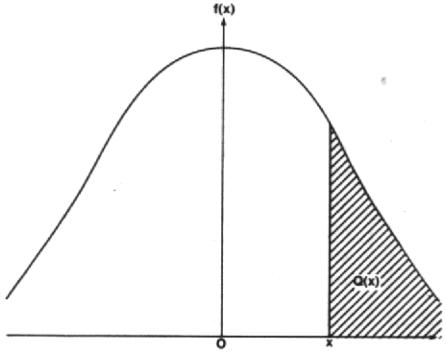
35. NORMALVERTEILUNG

Für eine standardisiert normalverteilte Zufallsvariable x gilt die Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

und die Verteilungsfunktion

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$



Für $x \geqslant 0$ wird $Q(x)$ mit Hilfe einer Approximation durch das folgende Polynom berechnet

$$Q(x) = f(x)(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \varepsilon(x)$$

wobei $|\varepsilon(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$

$$t = \frac{1}{1+rx}, \quad r = 0.2316419$$

$$b_1 = .31938153, \qquad b_2 = -.356563782$$
$$b_3 = 1.781477937, \qquad b_4 = -1.821255978$$
$$b_5 = 1.330274429$$

Anmerkung:

Das Programm setzt $x \geqslant 0$ voraus. Für die Berechnung von f und Q für negative Werte können die folgenden Beziehungen verwendet werden: $f(-x) = f(x)$, $Q(-x) = 1 - Q(x)$, $x \geqslant 0$.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	31	↑
02	23 06	STO 6
03	61	x
04	02	2
05	71	÷
06	32	CHS
07	15 07	g e^x
08	15 73	g π
09	02	2
10	61	x
11	14 02	f $\sqrt{x}$
12	71	÷
13	23 07	STO 7
14	74	R/S
15	24 00	RCL 0
16	24 06	RCL 6
17	61	x
18	01	1
19	51	+
20	15 22	g 1/x
21	31	↑
22	31	↑
23	31	↑
24	24 05	RCL 5

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	61	x
26	24 04	RCL 4
27	51	+
28	61	x
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	61	x
32	24 02	RCL 2
33	51	+
34	61	x
35	24 01	RCL 1
36	51	+
37	61	x
38	24 07	RCL 7
39	61	x
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 r
R_1 b_1
R_2 b_2
R_3 b_3
R_4 b_4
R_5 b_5
R_6 x
R_7 f(x)

Beispiele:

1. x = 1.18
2. x = 2.28

Lösungen:

1. f(x) = 0.20
   Q(x) = 0.12
2. f(x) = 0.03
   Q(x) = 0.01

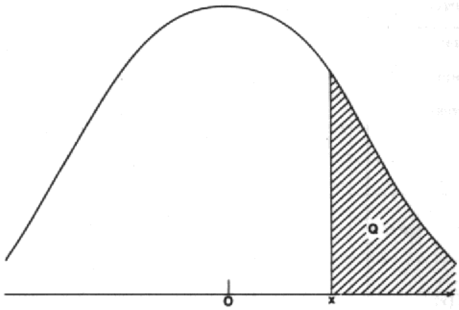
NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM			
3	Konstanten speichern	r	STO	0			
		b_1	STO	1			
		b_2	STO	2			
		b_3	STO	3			
		b_4	STO	4			
		b_5	STO	5			
4	x eingeben und f (x) berechnen	x	R/S				f(x)
5	Q (x) berechnen		R/S				Q(x)
6	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 4						

36. INVERTIERTES NORMALVERTEILUNGSINTEGRAL

Dieses Programm ermittelt den Wert x, so daß gilt

$$Q = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

$$0 < Q \leqslant 0.5.$$



Die folgende rationale Approximation wird zur Lösung des Problems verwendet:

$$x = t - \frac{c_0 + c_1\, t + c_2\, t^2}{1 + d_1\, t + d_2\, t^2 + d_3\, t^3} + \epsilon(Q)$$

wobei $|\epsilon(Q)| < 4.5 \times 10^{-4}$

$$t = \sqrt{\ln \frac{1}{Q^2}}$$

$c_0 = 2.515517$ $d_1 = 1.432788$
$c_1 = 0.802853$ $d_2 = 0.189269$
$c_2 = 0.010328$ $d_3 = 0.001308$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	31	↑
02	61	x
03	15 22	g 1/x
04	14 07	f LN
05	14 02	f $\sqrt{x}$
06	23 06	STO 6
07	31	↑
08	31	↑
09	31	↑
10	24 05	RCL 5
11	61	x
12	24 04	RCL 4
13	51	+
14	61	x
15	24 03	RCL 3
16	51	+
17	61	x
18	01	1
19	51	+
20	23 07	STO 7
21	34	CLX
22	24 02	RCL 2
23	61	x
24	24 01	RCL 1

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	51	+
26	61	x
27	24 00	RCL 0
28	51	+
29	24 07	RCL 7
30	71	÷
31	41	–
32	13 00	GTO 00
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 c_0
R_1 c_1
R_2 c_2
R_3 d_1
R_4 d_2
R_5 d_3
R_6 t
R_7 $1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3$

Beispiele:

1. Q = 0.12
2. Q = 0.05

Lösungen:

1. x = 1.18
2. x = 1.65

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM			
3	Konstanten speichern	c_0	STO	0			
		c_1	STO	1			
		c_2	STO	2			
		d_1	STO	3			
		d_2	STO	4			
		d_3	STO	5			
4	Q eingeben	Q	R/S				x
5	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 4.						

37. KOMBINATIONEN OHNE WIEDERHOLUNG MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER ANORDNUNG

Eine Kombination ohne Wiederholung mit Berücksichtigung der Anordnung ist eine geordnete Untermenge einer Menge verschiedener Elemente. Die Zahl der möglichen Kombinationen, von denen jede n Elemente enthält, die aus einer übergeordneten Menge von m verschiedenen Elementen gebildet werden können, ist gegeben durch:

$$P_n^m = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

wobei m und n ganzzahlig sind und $0 \leqslant n \leqslant m$.

Anmerkung:

1. P_n^m wird oft auch ${}_mP_n$, $P(m, n)$ oder $(m)_n$ geschrieben.
2. $P_0^m = 1$, $P_1^m = m$, $P_m^m = m!$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 00	RCL 0
02	24 00	RCL 0
03	24 01	RCL 1
04	15 71	g x=0
05	13 29	GTO 29
06	14 71	f x=y
07	13 31	GTO 31
08	14 51	f x⩾y
09	13 39	GTO 39
10	01	1
11	14 71	f x=y
12	13 41	GTO 41
13	22	R↓
14	41	–
15	01	1
16	51	+
17	61	x
18	14 73	f LASTx
19	24 00	RCL 0
20	01	1
21	41	–
22	14 71	f x=y
23	13 26	GTO 26
24	22	R↓
25	13 15	GTO 15
26	22	R↓
27	22	R↓
28	13 00	GTO 00
29	01	1
30	13 00	GTO 00
31	01	1
32	41	–
33	15 71	g x=0
34	13 37	GTO 37
35	23 61 00	STO x 0
36	13 31	GTO 31
37	24 00	RCL 0
38	13 00	GTO 00
39	00	0
40	71	÷
41	22	R↓
42	22	R↓
43	13 00	GTO 00
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 m
R_1 n
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. $P_{3}^{43} = 74046.00$
2. $P_{4}^{73} = 26122320.00$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	m und n speichern		f	PRGM			
3	Kombinationen berechnen	n	R/S				n!
4	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

38. KOMBINATIONEN OHNE WIEDERHOLUNG OHNE BERÜCKSICHTIGUNG DER ANORDNUNG

Dieses Programm berechnet die Anzahl der Möglichkeiten, jeweils n Elemente enthaltende Untermengen (ohne Berücksichtigung der Anordnung) aus einer Menge von m verschiedenen Elementen zu bilden. Diese Zahl ist gegeben durch:

$$C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

wobei m und n ganzzahlig sind und $0 \leqslant n \leqslant m$

Das Programm berechnet C_n^m nach folgendem Algorithmus:

1. Falls $n \leqslant m-n$ $\quad C_n^m = \frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{m}{n}$

2. Falls $n > m-n$ berechnet das Programm C_{m-n}^m.

Anmerkungen:

1. C_n^m, auch Binomialkoeffizient genannt, wird auch oft mit ${}_mC_n$, $C(m,n)$ oder $\binom{m}{n}$ bezeichnet.
2. $C_n^m = C_{m-n}^m$
3. $C_0^m = C_m^m = 1$
4. $C_1^m = C_{m-1}^m = m$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	41	–
02	14 73	f LASTx
03	14 41	f x<y
04	21	x⇄y
05	23 00	STO 0
06	01	1
07	23 01	STO 1
08	51	+
09	23 02	STO 2
10	22	R↓
11	15 71	g x=0
12	13 30	GTO 30
13	01	1
14	24 01	RCL 1
15	51	+
16	23 01	STO 1
17	21	x⇄y
18	14 51	f x≥y
19	13 22	GTO 22
20	24 02	RCL 2
21	13 00	GTO 00
22	22	x⇄y
23	24 00	RCL 0
24	51	+

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	24 01	RCL 1
26	71	÷
27	23 61 02	STO x 2
28	22	R↓
29	13 13	GTO 13
30	01	1
31	13 00	GTO 00
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 max (n, m – n)
R_1 belegt
R_2 belegt
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. $C_4^{73} = 1088430.00$
2. $C_3^{43} = 12341.00$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	m und n eingeben	m	↑				
		n	f	PRGM	R/S		${}_mC_n$
3	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

39. FAKULTÄT

Dieses Programm dient zur Berechnung der Fakultät einer Zahl n zwischen 2 und 69.

$n! = n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1)$

Anmerkungen:

1. Wenn n groß ist, braucht das Programm recht lange zur Berechnung von n! (maximal ca. 20 Sekunden für n = 69).
2. Das Programm prüft nicht, ob die eingegebenen Werte für n zulässig sind. Falls n<2 oder n>69 oder nicht ganzzahlig, treten Fehler im Ergebnis auf.

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	31	↑
02	01	1
03	23 00	STO 0
04	21	x⇄y
05	23 61 00	STO x 0
06	01	1
07	41	–
08	14 61	f x≠y
09	13 05	GTO 05
10	24 00	RCL 0
11	13 00	GTO 00
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 belegt
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. $5! = 120.00$
2. $10! = 3628800.00$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt	m	STO	0			
		n	STO	1			
3	Geben Sie n ein ($2<n\leqslant 69$)		f	PRGM	R/S		${}_mP_n$
4	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 3.						

40. ERZEUGUNG VON ZUFALLSZAHLEN

Das Programm erzeugt gleichverteilte Pseudo-Zufallszahlen u_i im Bereich

$0 \leqslant u_i \leqslant 1$

nach der folgenden Formel:

u_i = Nachkommateil von $[(\pi + u_{i-1})^5]$.

Ein Anfangswert u_0, der die Folge der Zufallszahlen bestimmt, ist vom Benutzer im Bereich $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ vorzugeben.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	15 73	g π
02	24 00	RCL 0
03	51	+
04	05	5
05	14 03	f y^x
06	15 01	g FRAC
07	23 00	STO 0
08	13 00	GTO 00
09		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 u_i
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Erzeugen Sie mit Hilfe dieses Programms Pseudo-Zufallszahlen; verwenden Sie als Anfangswert 0.192743568.

Lösung:

0.14, 0.76, 0.15, 0.35, 0.62, 0.54, 0.62, 0.91, 0.48, 0.24, ...

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Anfangswert speichern	u_0	STO	0	f	PRGM	
3	Zufallszahl erzeugen		R/S				u_i
4	Wiederholen Sie 4 beliebig oft						
5	Für eine neue Folge, gehen Sie nach 2.						

41. CHI-QUADRAT-TEST

Dieses Programm berechnet die Chi-Quadrat-Testvariable für die Güte der Anpassung:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

wobei O_i = beobachtete (absolute) Häufigkeit
E_i = erwartete (theoretische) Häufigkeit

Anmerkungen:

1. Um den Test für die Güte der Anpassung auf eine Menge gegebener Beobachtungsdaten anzuwenden, wird es bisweilen nötig sein, einige Klassen zusammenzufassen, um sicherzustellen, daß jede einzelne erwartete Häufigkeit nicht zu klein ist (nicht kleiner als 5).
2. Wenn alle erwarteten Häufigkeiten E_i gleich einem Erwartungswert E sind, sollte zuerst $E = \Sigma O_i/n$ berechnet werden; dieser Wert ist dann jeweils als erwartete Häufigkeit E_i einzugeben.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	00	0
02	23 00	STO 0
03	23 01	STO 1
04	74	R/S
05	23 02	STO 2
06	41	–
07	15 02	g x^2
08	24 02	RCL 2
09	71	÷
10	23 51 01	STO + 1
11	24 00	RCL 0
12	01	1
13	51	+
14	23 00	STO 0
15	13 04	GTO 04
16	23 02	STO 2
17	41	–
18	15 02	g x^2
19	24 02	RCL 2
20	71	÷
21	23 41 01	STO – 1
22	24 00	RCL 0
23	01	1
24	41	–

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	23 00	STO 0
26	13 04	GTO 04
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 n
R_1 χ^2
R_2 E_i
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

O_i	8	50	47	56	5	14
E_i	9.6	46.75	51.85	54.4	8.25	9.15

Lösung:

$x^2 = 4.84$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	PRGM	R/S		0.00
3	Geben Sie für i=1, ..., n						
	O_i und E_i ein						
		O_i	↑				
		E_i	R/S				i
4	Entfernen Sie falsch	O_k	↑				
	eingegebene Werte	E_k	GTO	16	R/S		
5	Zeigen Sie x^2 an		RCL	1			x^2
6	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

42. VERGLEICH ZWEIER MITTELWERTE (t-TEST)

Gegeben ist eine Menge von Beobachtungspaaren zweier normalverteilter Grundgesamtheiten mit den (unbekannten) Mittelwerten μ_1 und μ_2:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Es sei $D_i = x_i - y_i$

Die Testvariable $\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$

$$s_D = \sqrt{\frac{\Sigma D_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma D_i)^2}{n-1}}$$

$$s_{\overline{D}} = \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\overline{D}}{s_{\overline{D}}} \, ,$$

die $n-1$ Freiheitsgrade besitzt, kann zum Testen der Nullhypothese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ eingesetzt werden.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	41	–
02	25	Σ+
03	13 00	GTO 00
04	14 22	f s
05	24 03	RCL 3
06	14 02	f $\sqrt{x}$
07	71	÷
08	14 21	f $\bar{x}$
09	21	x⇄y
10	71	÷
11	74	R/S
12	24 03	RCL 3
13	01	1
14	41	–
15	13 00	GTO 00
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1
R_2
R_3 n
R_4 belegt
R_5 belegt
R_6 ΣD_i
R_7 ΣD_i^2

Beispiel:

x_i	14	17.5	17	17.5	15.4
y_i	17	20.7	21.6	20.9	17.2

Lösung:

t = −7.16

df = 4.00

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG	f	PRGM	
3	Geben Sie für i=1, . . ., n						
	je ein Datenpaar ein	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Entfernen Sie falsch ein-	x_k	↑				
	gegebene Daten	y_k	–	f	Σ–		
5	t und df berechnen		GTO	04	R/S		t
			R/S				df
6	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

43. t-TEST FÜR DEN VERGLEICH ZWEIER MITTELWERTE

Angenommen, $\{x_1, x_2, ..., x_{n1}\}$ und $\{y_1, y_2, ..., y_{n2}\}$ sind unabhängige Stichproben zweier normalverteilter Grundgesamtheiten mit den (unbekannten) Mittelwerten μ_1 und μ_2 und der gleichen unbekannten Varianz σ^2.

Wir wollen folgende Nullhypothese testen: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D$

wobei D ein gegebener Wert ist.

Hierzu definieren wir:

$$\overline{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i$$

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - D}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n_1 \overline{x}^2 + \Sigma y_i^2 - n_2 \overline{y}^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

Wir benutzen diese Testvariable t, die der t-Verteilung mit (df) $n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden folgt, um die Nullhypothese H_0 zu testen.

DISPLAY		KEY
LINE	CODE	ENTRY
00		
01	24 03	RCL 3
02	23 00	STO 0
03	24 06	RCL 6
04	23 01	STO 1
05	14 21	f $\bar{x}$
06	23 02	STO 2
07	34	CLX
08	23 03	STO 3
09	23 06	STO 6
10	23 07	STO 7
11	74	R/S
12	31	↑
13	14 21	f $\bar{x}$
14	51	+
15	24 02	RCL 2
16	21	x⇄y
17	41	–
18	24 00	RCL 0
19	15 22	g 1/x
20	24 03	RCL 3
21	15 22	g 1/x
22	51	+
23	14 02	f $\sqrt{x}$
24	71	÷

DISPLAY		KEY
LINE	CODE	ENTRY
25	24 01	RCL 1
26	24 02	RCL 2
27	15 02	g x^2
28	24 00	RCL 0
29	61	x
30	41	–
31	24 06	RCL 6
32	51	+
33	14 21	f $\bar{x}$
34	15 02	g x^2
35	24 03	RCL 3
36	61	x
37	41	–
38	24 00	RCL 0
39	24 03	RCL 3
40	51	+
41	02	2
42	41	–
43	71	÷
44	14 02	f $\sqrt{x}$
45	71	÷
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 n_1
R_1 Σx^2
R_2 $\bar{x}$
R_3 n_2
R_4 belegt
R_5 belegt
R_6 Σy^2
R_7 Σy

Beispiel:

x: 79, 84, 108, 114, 120, 103, 122, 120

y: 91, 103, 90, 113, 108, 87, 100, 80, 99, 54

$n_1 = 8$

$n_2 = 10$

$D = 0$ (d. h. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$)

Lösung:

$t = 1.73$

$\bar{x} = 106.25$

$\bar{y} = 92.50$

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG			
3	Geben Sie für i=1, ..., n1						
	je einen x-Wert ein	x_i	Σ+.				i
4	Vorbereitungsschritt für y		f	PRGM	R/S		0.00
5	Geben Sie für i=1, ..., n2						
	je einen y-Wert ein	y_i	Σ+				i
6	Geben Sie D ein und berechnen Sie t	D	R/S				t
7	Zur Berechnung von x						
	und y		RCL	2			$\bar{x}$
			f	$\bar{x}$			$\bar{y}$
8	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

ABSCHNITT 7: VERMESSUNG

44. KOORDINATENBERECHNUNG IM POLYGONZUG

Im Vermessungswesen werden häufig Polygonzüge im Zusammenhang mit Landvermessung, Straßenbau und ähnlichen Aufgaben verwendet. Ein solcher Polygonzug setzt sich aus Einzelstrecken bekannter Länge zusammen, die unter bekannten Winkeln zusammenhängen. Winkel und Länge können dabei beispielsweise mit einem Theodoliten und dem Meßband gemessen werden.

Ausgegangen wird von einem Festpunkt und einer Bezugsrichtung. In diesem Punkt, dessen Koordinaten in Form von Rechtswert und Hochwert (R und H) gegeben sind, wird der Theodolit aufgestellt und die Richtung einer neuen Strecke gemessen. Dazu wird entweder der Winkel zwischen beiden Strecken mit der Angabe, ob nach rechts oder links gemessen (stets zur neuen Strecke hin), oder der «Brechungswinkel» mit dem Zusatz «rechts» oder «links» festgestellt. Die entsprechenden Bezeichnungen für diese Winkel lauten WR, WL, BR und BL. Mit dem Meßband ergibt sich nun die Entfernung zum neuen Polygonzugpunkt P_2. Nun zieht man um nach P_2 und mißt von da, als neuem Ursprung aus, weiter.

Dieses Programm berechnet aus den Winkeln und Strecken die Koordinaten (Gauß-Krüger-Koordinaten) der Neupunkte. Falls der Polygonzug geschlossen ist, kann außerdem die eingeschlossene Fläche berechnet werden. Der Benutzer muß Hoch- und Rechtswert des Ausgangspunktes sowie die Richtung und die Entfernung zum Neupunkt eingeben. Die Entfernung kann dabei auf Wunsch auch als Schrägentfernung angegeben werden, wobei dann allerdings auch der Zenitwinkel einzugeben ist.

Formeln:

Horizontalentfernung (H Ent) = (S Ent) sin (ZW)

S Ent = Schrägentfernung

ZW = Zenitwinkel

$H_{i+1} = H_i + \text{H Ent} \cos \text{Az}$

$R_{i+1} = R_i + \text{H Ent} \sin \text{Az}$

Az = Azimut der Polygonstrecke

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2}[(H_2 + H_1)(R_2 - R_1) + (H_3 + H_2)(R_3 - R_2) + \\ + \ldots + (H_n + H_1)(R_1 - R_n)]$$

Anmerkungen:

1. Bei der Berechnung der Fläche im Fall von geschlossenen Polygonzügen können, falls die Koordinatenwerte sehr groß sind, Ungenauigkeiten auftreten. In solchen Fällen können Sie das nächste Programm verwenden, nachdem mit Hilfe dieses Programms die Werte für Entfernung und Azimut ermittelt wurden.
2. Alle Winkel werden in der Form D.MS (Grad, Minuten und Sekunden) eingegeben und berechnet.

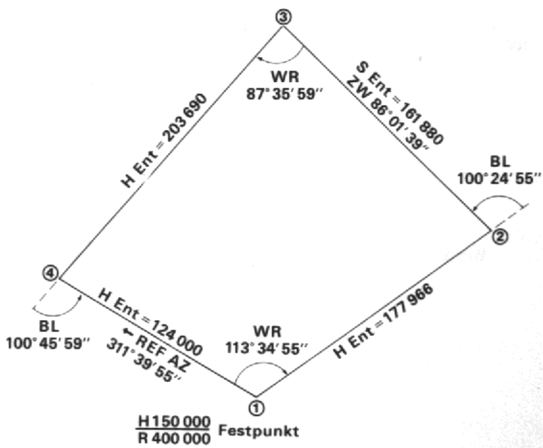
DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
00							
01	15 00	g →H	Ref Az				Convert to decimal degrees
02	01	1	1	Ref Az			
03	08	8	18	Ref Az			
04	00	0	180	Ref Az			
05	51	+	180 + Az				
06	23 00	STO 0	180 + Az				
07	24 01	RCL 1	N_1	180 + Az			
08	23 05	STO 5	N_1	180 + Az			Initialize "previous N"
09	00	0	0	N_1	180 + Az		Clear R_3, R_4, for
10	23 03	STO 3	0	N_1	180 + Az		accumulation
11	23 04	STO 4	0	N_1	180 + Az		
12	74	R/S	0	N_1	180 + Az		
13	15 00	g →H	Angle				Convert to decimal degrees
14	01	1	1	Angle			
15	08	8	18	Angle			
16	00	0	180	Angle			
17	51	+	180 + Ang				
18	14 00	f →H.MS	(D.MS)				
19	15 00	g →H	Defl				Deflection comes in here
20	24 00	RCL 0	Az	Defl			
21	51	+	Az + Defl				Find new azimuth
22	23 00	STO 0	Az_i				
23	14 00	f →H.MS	Az_i				Convert to D.MS for
24	74	R/S	Az_i				display
25	13 29	GTO 29	H Dist				
26	21	x⇄y	Zn Ang	S Dist			
27	14 04	f SIN	sin Zn	S Dist			
28	61	x	H Dist				H Dist = sin Zn (S Dist)
29	23 51 03	STO + 3	H Dist				Accumulate H Dist
30	24 00	RCL 0	Az	H Dist			
31	21	x⇄y	H Dist	Az			
32	14 09	f →R	ΔN	ΔE			
33	23 51 01	STO + 1	ΔN	ΔE			ΔN = H Dist (cos Az)
34	21	x⇄y	ΔE	ΔN			
35	23 51 02	STO + 2	ΔE	ΔN			ΔE = H Dist (sin Az)
36	24 05	RCL 5	N_{i-1}	ΔE	ΔN		
37	24 01	RCL 1	N_i	N_{i-1}	ΔE	ΔN	
38	23 05	STO 5	N_i	N_{i-1}	ΔE	ΔN	Update "previous N"
39	51	+	$(N_i + N_{i-1})$	ΔE	ΔN		
40	61	x	ΔA	ΔN			$ΔA = (N_i + N_{i-1})\ ΔE$
41	02	2	2	ΔA	ΔN		
42	71	÷	1/2 ΔA	ΔN			
43	23 51 04	STO + 4	1/2 ΔA	ΔN			Accumulate Area
44	24 01	RCL 1	N_i	1/2 ΔA	ΔN		
45	74	R/S	N_i	1/2 ΔA	ΔN		Display Northing
46	24 02	RCL 2	E_i	N_i	1/2 ΔA	ΔN	
47	13 12	GTO 12	E_i	N_i	1/2 ΔA	ΔN	Display Easting
48							
49							

REGISTERS	
R_0	Az
R_1	H_i
R_2	[illegible]
R_3	Σ H Ent.
R_4	Fläche
R_5	H_{i-1}
R_6	
R_7	

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Festpunktkoordinaten						
	eingeben	H_1	STO	1			
		R_1	STO	2			
3	Geben Sie das Referenzazimut ein	Ref. Az	f	PRGM	R/S		0.00
4a.	Geben Sie wahlweise ein: WR	WR	R/S				Az
4b.	oder WL	WL	CHS	R/S			Az
4c.	oder BR	BR	GTO	19	R/S		Az
4d.	oder BL	BL	CHS	GTO	19	R/S	Az
5a.	Geben Sie wahlweise ein:						Az
	H Ent	H Ent	R/S				H_i
5b.	oder ZW	ZW	↑				
	und S Ent	S Ent	GTO	26	R/S		H_i
			R/S				R_i
6	Wiederholen Sie 4 und 5						
	entsprechend oft.						
7	Σ H Ent anzeigen						
			RCL	3			Σ H Ent
8	Fläche anzeigen						
	(Vorzeichen unbedeutend)		RCL	4			Fläche

Beispiel:

In der nachstehenden Zeichnung sind alle gemessenen Werte eingetragen. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte 2, 3 und 4, die Summe der Horizontalentfernungen H Ent_i und die eingeschlossene Fläche.



Lösung:

150 STO 1 400 STO 2 311.3955 f PRGM R/S ⟶ 0.00

113.3455 R/S 177.966 R/S ⟶ 224.515 (H_2)

R/S ⟶ 561.615 (R_2)

100.2455 CHS GTO 1 9 R/S 86.0139 ↑ 161.880 GTO

2 6 R/S ⟶ 356.526 (H_3)

R/S ⟶ 468.601 (R_3)

87.3559 R/S 203.690 R/S ⟶ 232.335 (H_4)

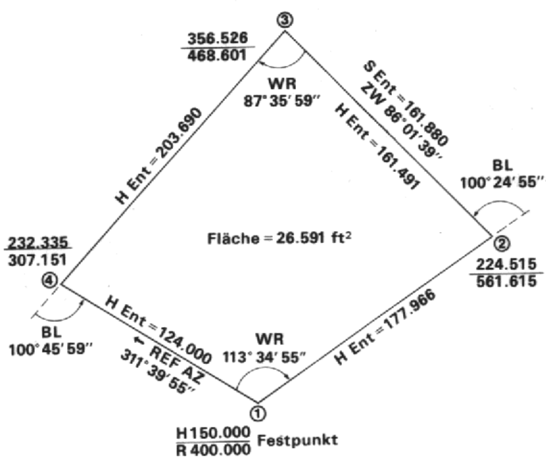
R/S ⟶ 307.151 (R_4)

100.4559 CHS GTO 1 9 R/S 124.0 R/S ⟶ 149.903 (H_1)

R/S ⟶ 399.784 (R_1)

RCL 3 ⟶ 667.144 (ΣH Ent)

RCL 4 ⟶ 26590.68 (Fläche)



Berechnete Festpunkt-Koordinaten: $\frac{H = 149.903}{R = 399.784}$

45. VIELECK-FLÄCHE

Dieses Programm berechnet die Fläche eines in sich geschlossenen Polygonzuges. Die Seiten sind durch Richtung und Länge gegeben. Die Flächenberechnung auf Grund dieser Daten ist in der Regel genauer als wenn man von den Koordinaten der Eckpunkte ausgeht.

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot \Sigma_i \, C_i \cdot V_i$$

wobei $C_i = C_{i-1} + H_{i-1} + H_i$

$H_i = H\,Ent_i \sin Az_i$

$V_i = H\,Ent_i \cos Az_i$

Anmerkung:

Die Winkel werden in Form von Richtung und Codezahl für den jeweiligen Quadranten eingegeben. Die Codezahl beträg 1 für NO, 2 für SO, 3 für SW und 4 für NW.

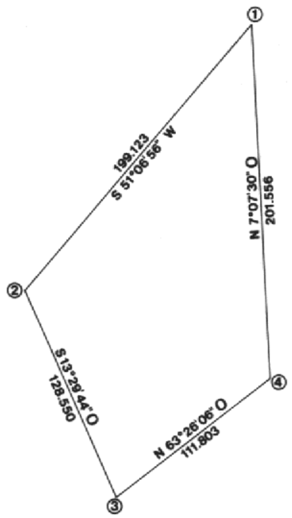
DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	15 00	g →H
02	74	R/S
03	02	2
04	71	÷
05	31	↑
06	14 01	f INT
07	14 61	f x≠y
08	13 14	GTO 14
09	22	R↓
10	22	R↓
11	32	CHS
12	22	R↓
13	22	R↓
14	22	R↓
15	14 01	f INT
16	01	1
17	08	8
18	00	0
19	61	x
20	51	+
21	23 00	STO 0
22	14 00	f →H.MS
23	74	R/S
24	24 00	RCL 0

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	21	x⇄y
26	14 09	f →R
27	21	x⇄y
28	24 02	RCL 2
29	21	x⇄y
30	23 02	STO 2
31	51	+
32	24 01	RCL 1
33	51	+
34	23 01	STO 1
35	61	x
36	02	2
37	71	÷
38	23 51 03	STO + 3
39	24 03	RCL 3
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 Az_i
R_1 C_{i-1}
R_2 H_i
R_3 Fläche
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Berechnen Sie die Fläche des folgenden Vielecks.



Lösung:

Fläche = 20937.44 ft^2.

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Vorbereitungsschritt		f	REG	f	PRGM	
3	Richtung eingeben	Richt.	R/S				Richt. Dezimalgrad.
4	Quadrant (Code) eingeben	Quad.	R/S				Az. D.MS
5	Entfernung eingeben	H Ent	R/S				Fläche
6	Wiederholen Sie 4 und 5 für						
	alle Strecken. Die Fläche wird						
	nach letzter Eingabe angezeigt.						

46. AZIMUT UND LÄNGE VON POLYGONZUGSTRECKEN

Dieses Programm dient (umgekehrt wie in Programm 44) dazu, aus den Koordinaten der Eckpunkte eines Polygonzuges Richtung und Länge der Einzelstrecken zu berechnen. Außerdem erhalten Sie die Summe der Einzelstrecken und die Fläche in ft^2.

Formeln:

$$\text{H Ent} = \sqrt{(H_i - H_{i-1})^2 + (R_i - R_{i-1})^2}$$

$$\text{Az} = \tan^{-1}\left[\frac{R_i - R_{i-1}}{H_i - H_{i-1}}\right]$$

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2}\,[(H_2 + H_1)(R_2 - R_1) + (H_3 + H_2)(R_3 - R_2) + \ldots$$

$$\ldots + (H_n + H_1)(R_1 - R_n)]$$

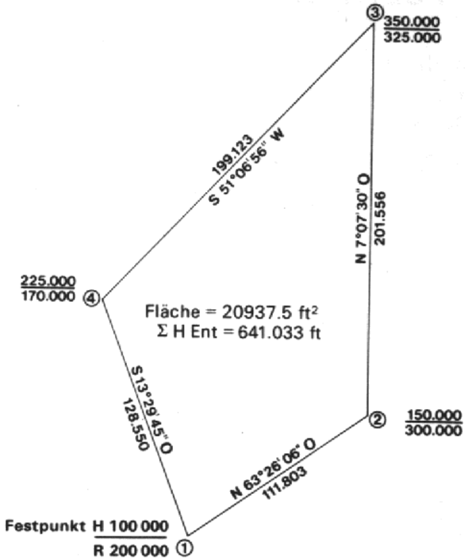
wobei H Ent = Horizontalentfernung
Az = Azimut
H, R = Hoch- bzw. Rechtswert

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	14 33	f REG
02	23 02	STO 2
03	21	x⇄y
04	23 00	STO 0
05	23 01	STO 1
06	74	R/S
07	24 02	RCL 2
08	41	−
09	23 51 02	STO + 2
10	23 05	STO 5
11	21	x⇄y
12	24 01	RCL 1
13	41	−
14	23 51 01	STO + 1
15	15 09	g →P
16	23 51 03	STO + 3
17	74	R/S
18	21	x⇄y
19	15 51	g x≥0
20	13 25	GTO 25
21	03	3
22	06	6
23	00	0
24	51	+

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	31	↑
26	31	↑
27	09	9
28	00	0
29	71	÷
30	01	1
31	51	+
32	14 01	f INT
33	21	x⇄y
34	14 04	f SIN
35	15 04	g SIN^{-1}
36	15 41	g x<0
37	32	CHS
38	14 00	f →H.MS
39	24 00	RCL 0
40	24 01	RCL 1
41	23 00	STO 0
42	51	+
43	24 05	RCL 5
44	61	x
45	02	2
46	71	÷
47	23 51 04	STO + 4
48	22	R↓
49	13 06	GTO 06

REGISTERS	
R_0	H_{i-1}
R_1	H_i
R_2	R_i
R_3	Σ H Ent
R_4	Fläche
R_5	ΔR
R_6	
R_7	

Beispiel:



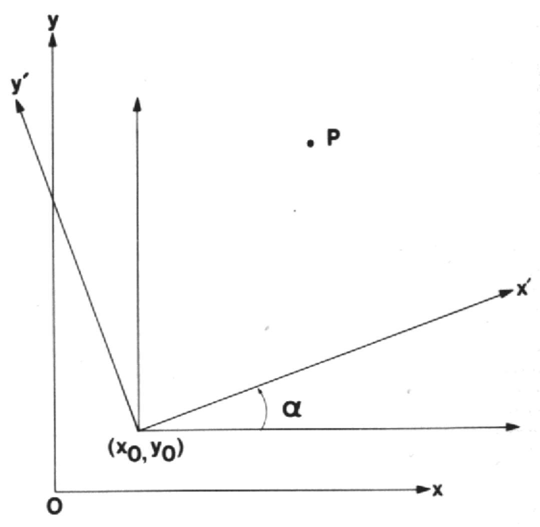
Fläche = 20937.5 ft^2
Σ H Ent = 641.033 ft

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Startkoordinaten eingeben	H_1	↑				
		R_1	f	PRGM	R/S		
3	Nächste Koordinaten						
	eingeben	H_i	↑				
		R_i	R/S				H Ent
4	Richtung und Quadrant						
	(Code) berechnen		R/S				Richt.
			R↓				Quad.
5	Wiederholen Sie 3 und 4 für						
	alle Eckpunkte						
6	Zeigen Sie Σ H Ent an		RCL	3			Σ H Ent.
7	Zeigen Sie die Fläche der						
	geschlossenen Figur an (Vorzeichen unbedeutend)		RCL	4			Fläche

ABSCHNITT 8: TRIGONOMETRIE UND ANALYTISCHE GEOMETRIE

47. TRANSLATION UND ROTATION EINES KOORDINATENSYSTEMS

Häufig tritt das Problem auf, daß, z.B. in der Kartographie, das Bezugssystem gewechselt werden muß. Mathematisch gesprochen bedeutet dies, daß eine Translation und/oder Rotation des Koordinatensystems durchgeführt werden muß. Der Ursprung wird vom Punkt (0,0) in einen neuen Punkt (x_0, y_0) verschoben und die Achsen dann um einen Winkel α gedreht, so daß aus den x- und y-Achsen jetzt x'- und y'-Achsen geworden sind. Nehmen Sie an, ein Punkt P hat im alten System (x-, y-Achsen) die Koordinaten (x, y). Jetzt gilt es, die neuen Koordinaten (x', y') im verschobenen und gedrehten Koordinatensystem mit den Achsen x' und y' zu finden. Die nachstehende Skizze verdeutlicht das.



Formeln:

$$x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha$$

$$y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha$$

Anmerkungen:

1. Wird das System nur verschoben und nicht gedreht, ist für α der Wert Null einzugeben. Findet nur eine Rotation statt, muß $x_0 = y_0 = 0$ eingegeben werden.
2. Der Winkel α ist positiv einzugeben, wenn die Rotation im mathematisch positiven Sinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) erfolgt, im anderen Fall negativ.

Anmerkungen zum Programm:

Dieses Programm demonstriert eine besonders nützliche Anwendungsweise der Umwandlung von Polar- in rechtwinklige Koordinaten ([f] [→R]) in Verbindung mit den Stackregistern. Die Ausdrücke $(x - x_0) \cos \alpha$, $(x - x_0) \sin \alpha$, $(y - y_0) \cos \alpha$ und $(y - y_0) \sin \alpha$ werden alle mittels [f] [→R] berechnet und im Stack bis zu ihrer Verwendung gespeichert. Eine Verwendung von [f] [sin] und [f] [cos] hätte 30 Programmschritte (im Vergleich zu 19) und ein weiteres Speicherregister erfordert.

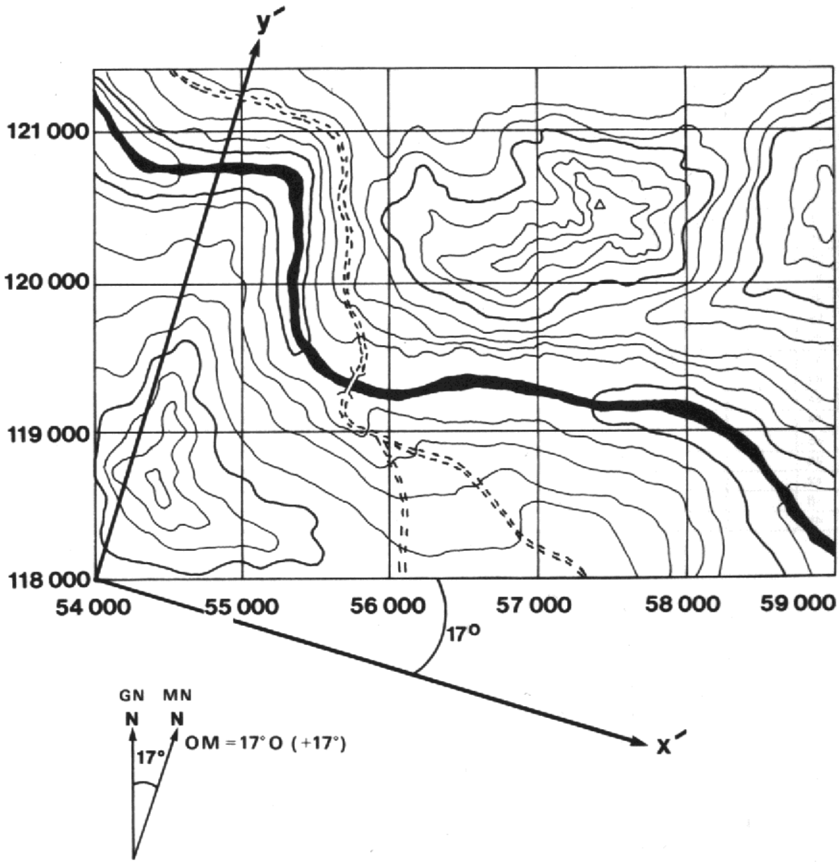
DISPLAY		KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS
LINE	CODE						
00			y	x			
01	23 03	STO 3	y	x			
02	22	R↓	x			y	
03	24 02	RCL 2	α	x			
04	21	x⇄y	x	α			
05	24 00	RCL 0	x_0	x	α		
06	41	–	Δx	α			$\Delta x = x - x_0$
07	14 09	f →R	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$			
08	24 03	RCL 3	y	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$		
09	24 01	RCL 1	y_0	y	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	
10	41	–	Δy	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	$\Delta y = y - y_0$
11	24 02	RCL 2	α	Δy	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	
12	21	x⇄y	Δy	α	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	
13	14 09	f →R	$\Delta y \cos\alpha$	$\Delta y \sin\alpha$	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	
14	22	R↓	$\Delta y \sin\alpha$	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	$\Delta y \cos\alpha$	
15	51	+	x'	$\Delta x \sin\alpha$	$\Delta y \cos\alpha$	$\Delta y \cos\alpha$	$x' = \Delta x \cos\alpha + \Delta y \sin\alpha$
16	74	R/S	x'	$\Delta x \sin\alpha$	$\Delta y \cos\alpha$	$\Delta y \cos\alpha$	
17	22	R↓	$\Delta x \sin\alpha$	$\Delta y \cos\alpha$	$\Delta y \cos\alpha$	x'	
18	41	–	y'	$\Delta y \cos\alpha$	x'	x'	$y' = -\Delta x \sin\alpha + \Delta y \cos\alpha$
19	13 00	GTO 00	y'	$\Delta y \cos\alpha$	x'	x'	
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTERS	
R_0	x_0
R_1	y_0
R_2	α
R_3	y
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

Beispiel:

Ein Wanderer beabsichtigt eine Tour quer durch das Gelände. Er weiß, daß er seine Position laufend mit Hilfe des Marsch-Kompasses und der Karte überprüfen muß. Leider hat die Karte ein recht unbequemes Maß für seinen Zweck. Die Gitterlinien stellen die Entfernungen in Fuß von einem Ursprung in 25 Meilen Entfernung dar, die so groß sind, daß sich nicht gut mit ihnen rechnet. Zweitens sind die Gitterlinien nach geographisch Nord ausgerichtet, während sich sein Kompaß auf magnetisch Nord ausrichtet. Die Ortsmißweisung beträgt dabei $+17^\circ$.

Aus diesen Gründen entschließt sich der Tramper vor seinem Aufbruch, eine «eigene» Karte zu skizzieren, deren Ursprung er in den Punkt (54000, 118000) legt und die er um 17° gegenüber der alten Karte im Uhrzeigersinn dreht. Jetzt möchte er als erstes die neuen Koordinaten der Brücke und des Hügels bestimmen, die in der alten Karte (55750, 119300) und (57450, 120500) sind.



Lösung:

54000 STO 0 118000 STO 1 17 CHS STO 2 f PRGM

55750 ↑ 119300 R/S → 1293.45

R/S → 1754.85

Die neuen Koordinaten der Brücke sind (1293, 1755).

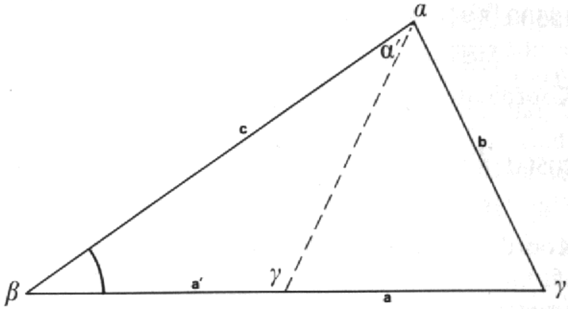
57450 ↑ 120500 R/S → 2568.32

R/S → 3399.44

Die neuen Koordinaten des Hügels sind (2568, 3399).

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Koordinaten des neuen						
	Nullpunktes eingeben	x_0	STO	0			
		y_0	STO	1			
3	Winkel α eingeben	α	STO	2	f	PRGM	
4	Koordinatentransformation						
		x	↑				
		y	R/S				x'
			R/S				y'
5	Wiederholen Sie 4 für beliebig						
	viele Punkte						
6	Für eine neue Rechnung, gehen Sie nach 2.						

48. DREIECKBESTIMMUNG (GEGEBEN β, b UND c)



Zu zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel berechnet das Programm die übrigen Dreiecksgrößen nach folgenden Formeln:

1. $\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{c \sin\beta}{b}\right)$

2. $\alpha = 2\sin^{-1} 1 - (\beta+\gamma) = \pi \text{ rad} - (\beta+\gamma) = 180° - (\beta+\gamma) =$
   $= 200 \text{ Neugrad} - (\beta+\gamma)$

3. $a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$.

Falls β ein spitzer Winkel ist (<90°) und weiter b<c, gibt es ein zweites System von Lösungen, die durch folgende Formeln bestimmt sind:

4. $\text{Fläche} = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin\beta$

5. $\gamma' = 2\sin^{-1} 1 - \gamma$

6. $\alpha' = 2\sin^{-1} 1 - (\beta + \gamma')$

7. $a' = \frac{b \sin\alpha'}{\sin\beta}$

8. $\text{Fläche} = \frac{1}{2} \times a' \times c' \times \sin\beta$

Das Programm arbeitet in jedem Winkel-Modus; im Modus DEG werden dezimale Grad erwartet.

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	24 03	RCL 3
02	24 01	RCL 1
03	14 04	f SIN
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	71	÷
07	15 04	g SIN^{-1}
08	23 05	STO 5
09	74	R/S
10	24 01	RCL 1
11	51	+
12	01	1
13	15 04	g SIN^{-1}
14	02	2
15	61	x
16	23 04	STO 4
17	21	x⇄y
18	41	–
19	74	R/S
20	14 04	f SIN
21	24 02	RCL 2
22	61	x
23	24 01	RCL 1
24	14 04	f SIN

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	71	÷
26	74	R/S
27	24 03	RCL 3
28	61	x
29	24 01	RCL 1
30	14 04	f SIN
31	61	x
32	02	2
33	71	÷
34	74	R/S
35	24 04	RCL 4
36	24 05	RCL 5
37	41	–
38	74	R/S
39	13 10	GTO 10
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 β
R_2 b
R_3 c
R_4 $2 \sin^{-1} 1$
R_5 γ
R_6
R_7

Beispiel:

Gegeben sind folgende zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel:

$\beta = 42.3°$
$b = 25.6$
$c = 32.8$

Finden Sie die übrigen Dreiecksgrößen.

Lösung:

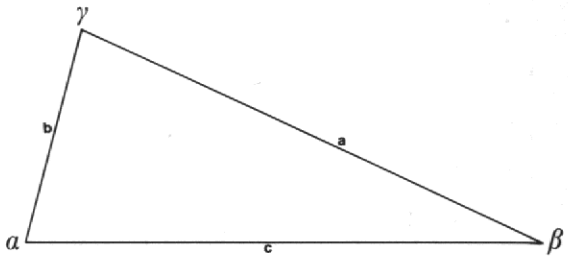
Da β kleiner als 90° ist und b<c, gibt es zwei Systeme von Lösungen:

$\gamma = 59.58°$
$\alpha = 78.12°$
$a = 37.22$
Fläche = 410.85

$\gamma' = 120.42°$
$\alpha' = 17.28°$
$a' = 11.30$
Fläche′ = 124.68

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Speichern Sie β, b und c	β	STO	1			
		b	STO	2			
		c	STO	3			
3	Übrige Größen berechnen		f	PRGM	R/S		γ*
			R/S				α*
			R/S				a*
			R/S				Fläche
4	Falls β < 90° und b < c,						
	berechnen Sie weiteres		R/S				γ′*
	Lösungssystem		R/S				α′*
	(* Der Stackinhalt darf an		R/S				a′*
	dieser Stelle nicht verändert		R/S				Fläche′
	werden.)						

49. DREIECKBESTIMMUNG (GEGEBEN a, b UND c)



Das Programm berechnet zu gegebenen Werten für die Seiten a, b und c die Winkel im Dreieck nach folgenden Formeln:

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{b \sin C}{c}\right) \qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \sin C}{c}\right)$$

Ändern Sie ggf. die Bezeichnung der Seiten, so daß c die längste Dreieckseite ist. Das Programm arbeitet in jedem Winkel-Modus. Im Modus DEG verstehen sich die Winkel als dezimale Grad.

Das Programm berechnet außerdem die Fläche des Dreiecks nach der Formel:

$$\text{Fläche} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

wobei $s = (a+b+c)/2$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	24 01	RCL 1
02	24 02	RCL 2
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	24 03	RCL 3
06	15 02	g x^2
07	41	–
08	24 01	RCL 1
09	24 02	RCL 2
10	61	x
11	02	2
12	61	x
13	71	÷
14	15 05	g COS^{-1}
15	74	R/S
16	14 04	f SIN
17	24 03	RCL 3
18	71	÷
19	23 00	STO 0
20	24 02	RCL 2
21	61	x
22	15 04	g SIN^{-1}
23	74	R/S
24	24 00	RCL 0

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	24 01	RCL 1
26	61	x
27	15 05	g SIN^{-1}
28	74	R/S
29	24 01	RCL 1
30	24 02	RCL 2
31	51	+
32	24 03	RCL 3
33	51	+
34	02	2
35	71	÷
36	31	↑
37	23 00	STO 0
38	24 01	RCL 1
39	41	–
40	61	x
41	24 00	RCL 0
42	24 02	RCL 2
43	41	–
44	61	x
45	24 00	RCL 0
46	24 03	RCL 3
47	41	–
48	61	x
49	14 02	f $\sqrt{x}$

REGISTERS
R_0 belegt
R_1 a
R_2 b
R_3 c
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

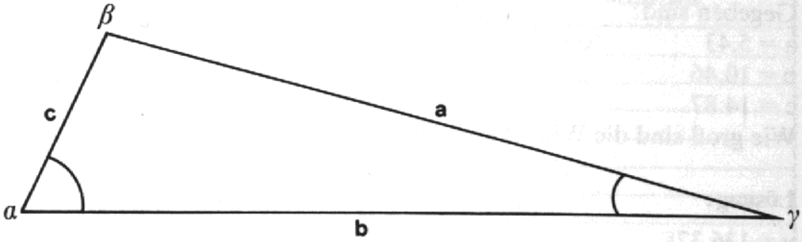
Gegeben sind:
a = 5.43
b = 10.46
c = 14.87
Wie groß sind die Winkel und die Fläche?

Lösung:

$\gamma = 136.37°$
$\beta = 29.04°$
$\alpha = 14.59°$
Fläche = 19.60

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	Seiten speichern (c ist die	a	STO	1			
	längste Seite)	b	STO	2			
		c	STO	3			
3	Übrige Größen berechnen		f	PRGM	R/S		$\gamma°$
			R/S				$\beta°$
			R/S				$\alpha°$
			R/S				Fläche
4		a	STO	1			
		b	STO	2			
		c	STO	3			
			GTO	29	R/S		Fläche

50. DREIECKBESTIMMUNG (GEGEBEN a, α UND γ)



Zu gegebenen zwei Winkeln und einer anliegenden Seite berechnet das Programm die übrigen Größen des Dreiecks nach den Formeln:

$$\beta = 2 \sin^{-1} 1 - (\alpha + \gamma) = \pi \text{ rad} - (\alpha + \gamma) = 180° - (\alpha + \gamma)$$
$$= 200 \text{ Neugrad} - (\alpha + \gamma)$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Das Programm arbeitet in jedem beliebigen Winkel-Modus; im Modus DEG verstehen sich die Winkel als dezimale Grad.

Die Fläche des Dreiecks wird nach folgender Formel berechnet:

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	01	1
02	15 04	g SIN^{-1}
03	02	2
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	24 03	RCL 3
07	51	+
08	41	–
09	74	R/S
10	14 04	f SIN
11	24 01	RCL 1
12	61	x
13	24 02	RCL 2
14	14 04	f SIN
15	71	÷
16	23 04	STO 4
17	74	R/S
18	24 01	RCL 1
19	14 73	f LASTx
20	71	÷
21	24 03	RCL 3
22	14 04	f SIN
23	61	x
24	74	R/S

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	24 01	RCL 1
26	24 04	RCL 4
27	61	x
28	24 03	RCL 3
29	14 04	f SIN
30	61	x
31	02	2
32	71	÷
33	13 00	GTO 00
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 a
R_2 α
R_3 γ
R_4 b
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

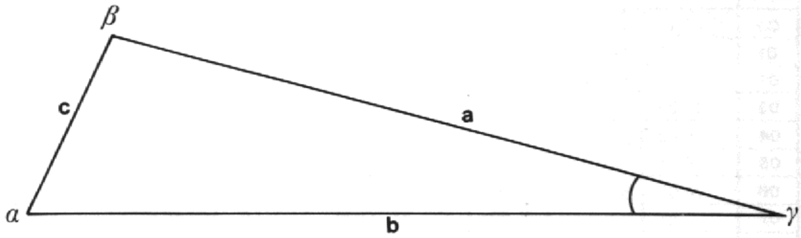
Gegeben ist a = 19.6, $\alpha = 40.25°$, $\gamma = 61.06°$.
Bestimmen Sie die übrigen Dreiecksgrößen und die Fläche.

Lösung:

$\beta = 78.69°$
b = 29.75
c = 26.55
Fläche = 255.11

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	a, α und γ speichern	a	STO	1			
		α	STO	2			
		γ	STO	3			
3	Übrige Größen berechnen		f	PRGM	R/S		β*
			R/S				b*
			R/S				c
			R/S				Fläche
	(* Der Stackinhalt darf an						
	dieser Stelle nicht verändert						
	werden.)						

51. DREIECKBESTIMMUNG (GEGEBEN a, b UND γ)



Zu gegebenen zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel berechnet das Programm die übrigen Größen im Dreieck nach folgenden Formeln:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \sin \gamma}{c}\right)$$

$$\beta = 2 \sin^{-1} 1 - (\alpha + \gamma) = \pi \text{ rad} - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$
$$= 200 \text{ Neugrad} - (\alpha + \gamma)$$

Die Fläche wird nach

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

berechnet.

Wählen Sie die Bezeichnung derart, daß a die kleinere der Seiten a und b ist.

Das Programm arbeitet in jedem beliebigen Winkel-Modus; im Modus DEG werden alle Winkel als dezimale Grad angesehen.

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	24 01	RCL 1
02	24 02	RCL 2
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	24 01	RCL 1
06	24 02	RCL 2
07	61	x
08	02	2
09	61	x
10	24 03	RCL 3
11	14 05	f COS
12	61	x
13	41	–
14	14 02	f $\sqrt{x}$
15	74	R/S
16	24 01	RCL 1
17	24 03	RCL 3
18	14 04	f SIN
19	61	x
20	21	x⇄y
21	71	÷
22	15 04	g SIN^{-1}
23	74	R/S
24	01	1

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	15 04	g SIN^{-1}
26	02	2
27	61	x
28	21	x⇄y
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	41	–
32	74	R/S
33	24 03	RCL 3
34	14 04	f SIN
35	24 01	RCL 1
36	61	x
37	24 02	RCL 2
38	61	x
39	02	2
40	71	÷
41	13 00	GTO 00
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 a
R_2 b
R_3 γ
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

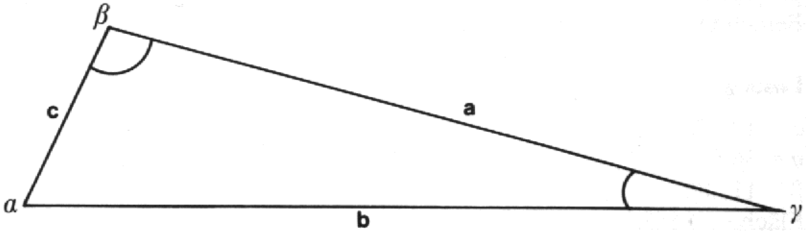
Gegeben sind a = 146, b = 227 und $\gamma = 31.49°$.
Berechnen Sie die übrigen Dreiecksgrößen.

Lösung:

c = 127.76
$\alpha = 36.65°$
$\beta = 111.86°$
Fläche = 8655.86

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	a, b und γ speichern						
		a	STO	1			
		b	STO	2			
		γ	STO	3			
3	Übrige Größen berechnen		f	PRGM	R/S		c*
			R/S				α*
			R/S				β
			R/S				Fläche
4	Falls nur die Fläche	a	STO	1			
	benötigt wird	b	STO	2			
		γ	STO	3			
			GTO	33	R/S		Fläche
	(* Der Stackinhalt darf an						
	dieser Stelle nicht verändert						
	werden.)						

52. DREIECKBESTIMMUNG (GEGEBEN a, β UND γ)



Das Programm berechnet zu zwei gegebenen Winkeln im Dreieck sowie der eingeschlossenen Seite die übrigen Größen nach folgenden Formeln:

$$\alpha = 2 \sin^{-1} 1 - (\beta + \gamma) = \pi \text{ rad} - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$
$$= 200 \text{ Neugrad} - (\beta + \gamma)$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Die Fläche wird nach der Formel

$$\text{Fläche} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}$$

berechnet.

Das Programm arbeitet in jedem beliebigen Winkel-Modus; im Modus DEG werden alle Winkel als dezimale Grad aufgefaßt.

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	01	1
02	15 04	g SIN^{-1}
03	02	2
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	24 03	RCL 3
07	51	+
08	41	–
09	23 04	STO 4
10	74	R/S
11	24 01	RCL 1
12	24 04	RCL 4
13	14 04	f SIN
14	71	÷
15	23 04	STO 4
16	24 02	RCL 2
17	14 04	f SIN
18	61	x
19	74	R/S
20	24 04	RCL 4
21	24 03	RCL 3
22	14 04	f SIN
23	61	x
24	74	R/S

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25	24 01	RCL 1
26	15 02	g x^2
27	02	2
28	71	÷
29	24 02	RCL 2
30	14 04	f SIN
31	61	x
32	24 03	RCL 3
33	14 04	f SIN
34	61	x
35	24 02	RCL 2
36	24 03	RCL 3
37	51	+
38	14 04	f SIN
39	71	÷
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1 a
R_2 β
R_3 γ
R_4 α, (a/sin α)
R_5
R_6
R_7

Beispiel:

Gegeben sind $a = 20.96$, $\beta = 64° 32'$, $\gamma = 35° 06'$.
Berechnen Sie die übrigen Dreiecksgrößen.

Lösung:

$\alpha = 80.37°$
$b = 19.19$
$c = 12.22$
Fläche = 115.66

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	a, β und γ speichern	a	STO	1			
		β	STO	2			
		γ	STO	3			
3	Übrige Größen berechnen		f	PRGM	R/S		α*
			R/S				b*
			R/S				c
			R/S				Fläche
4	Falls nur die Fläche benötigt	a	STO	1			
	wird	β	STO	2			
		γ	STO	3			
			GTO	25	R/S		Fläche
	(* Der Stackinhalt darf an						
	dieser Stelle nicht verändert						
	werden.)						

53. HYPERBELFUNKTIONEN

Dieses Programm berechnet die sechs hyperbolischen Funktionen nach folgenden Formeln:

1. $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}$ $(x \neq 0)$

5. $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

6. $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$ $(x \neq 0)$

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
00		
01	15 07	g e^x
02	31	↑
03	15 22	g 1/x
04	41	–
05	02	2
06	71	÷
07	13 00	GTO 00
08	15 07	g e^x
09	31	↑
10	15 22	g 1/x
11	51	+
12	13 05	GTO 05
13	15 07	g e^x
14	31	↑
15	15 22	g 1/x
16	41	–
17	31	↑
18	31	↑
19	14 73	f LASTx
20	02	2
21	61	x
22	51	+
23	71	÷
24	13 00	GTO 00

DISPLAY LINE	DISPLAY CODE	KEY ENTRY
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. sinh 2.5 = 6.05
2. cosh 3.2 = 12.29
3. tanh 1.9 = 0.96
4. csch 4.6 = 0.02
5. sech (–.25) = 0.97
6. coth (–2.01) = –1.04

NR.	ANWEISUNG	WERTE	TASTEN				ANZEIGE
1	Programm eintasten						
2	sinh x	x	f	PRGM	R/S		sinh x
	oder						
	cosh x	x	GTO	08	R/S		cosh x
	oder						
	tanh x	x	GTO	13	R/S		tanh x
	oder						
	csch x	x	f	PRGM	R/S		
			g	$^1/x$			csch x
	oder						
	sech x	x	GTO	08	R/S		
			g	$^1/x$			sech x
	oder						
	coth x	x	GTO	13	R/S		
			g	$^1/x$			coth x

54. HYPERBOLISCHE UMKEHRFUNKTIONEN

Das Programm berechnet die folgenden hyperbolischen Umkehrfunktionen:

1. $\sinh^{-1} x = \ln\,[x + (x^2 + 1)^{½}]$
2. $\cosh^{-1} x = \ln\,[x + (x^2 - 1)^{½}]$ $\qquad x \geqslant 1$
3. $\tanh^{-1} x = ½ \ln\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right]$ $\qquad x^2 < 1$
4. $\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1}\left[\dfrac{1}{x}\right]$ $\qquad x \neq 0$
5. $\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\left[\dfrac{1}{x}\right]$ $\qquad 0 < x \leqslant 1$
6. $\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\left[\dfrac{1}{x}\right]$ $\qquad x^2 > 1$

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
00		
01	31	↑
02	31	↑
03	61	x
04	01	1
05	51	+
06	14 02	f $\sqrt{x}$
07	51	+
08	14 07	f LN
09	13 00	GTO 00
10	31	↑
11	31	↑
12	61	x
13	01	1
14	41	–
15	14 02	f $\sqrt{x}$
16	51	+
17	14 07	f LN
18	13 00	GTO 00
19	31	↑
20	31	↑
21	01	1
22	51	+
23	21	x⇄y
24	32	CHS

DISPLAY		KEY ENTRY
LINE	CODE	
25	01	1
26	51	+
27	71	÷
28	14 07	f LN
29	02	2
30	71	÷
31	13 00	GTO 00
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Beispiele:

1. $\sinh^{-1}(2.4) = 1.61$
2. $\cosh^{-1}(90) = 5.19$
3. $\tanh^{-1}(-.65) = -0.78$
4. $\operatorname{csch}^{-1}(2) = 0.48$
5. $\operatorname{sech}^{-1}(.4) = 1.57$
6. $\coth^{-1}(3.4) = 0.30$

1	Programm eintasten						
2	$\sinh^{-1} x$	x	f	PRGM	R/S		$\sinh^{-1} x$
	oder						
	$\cosh^{-1} x$	x	GTO	10	R/S		$\cosh^{-1} x$
	oder						
	$\tanh^{-1} x$	x	GTO	19	R/S		$\tanh^{-1} x$
	oder						
	$\operatorname{csch}^{-1} x$	x	g	1/x	f	PRGM	
			R/S				$\operatorname{csch}^{-1} x$
	oder						
	$\operatorname{sech}^{-1} x$	x	g	1/x	GTO	10	
			R/S				$\operatorname{sech}^{-1} x$
	$\coth^{-1} x$	x	g	1/x	GTO	19	
			R/S				$\coth^{-1} x$

INDEX

HEWLETT hp PACKARD

172 mal Verkauf und Service in 65 Ländern

Hewlett-Packard GmbH/Vertrieb:
1000 Berlin 30, Keith Straße 2–4, Telefon (030) 24 90 86
7030 Böblingen, Herrenbergerstraße 130, Telefon (07031) 667-1
4000 Düsseldorf, Vogelsanger Weg 38, Telefon (0211) 63 80 31/5
6000 Frankfurt 56, Berner Straße 117, Postfach 560140, Telefon (0611) 50 04-1
2000 Hamburg 1, Wendenstraße 23, Telefon (040) 24 13 93
3000 Hannover-Kleefeld, Mellendorfer Straße 3, Telefon (0511) 55 60 46
8500 Nürnberg, Neumeyer Straße 30, Telefon (0911) 56 30 83/85
8012 Ottobrunn, Isar Center, Unterhachinger Straße 28, Telefon (089) 601 30 61/67

Für die Schweiz: Hewlett-Packard (Schweiz) AG, Zürcherstraße 20, Postfach 64, 8952 Schlieren-Zürich, Telefon (01) 98 18 21 und 98 52 40

Für Österreich/Für sozialistische Staaten:
Hewlett-Packard Ges.m.b.H., Handelskai 52/53, Postfach 7, A-1205 Wien, Österreich, Telefon (0222) 35 16 21 bis 32

Für die UdSSR: Hewlett-Packard Representative Office USSR, Hotel Budapest Room 201, Petrovskje Linii 2/18, 103-051 Moscow

Europa-Zentrale:
Hewlett-Packard S.A., 7, rue du Bois-du-Lan, Postfach 349, CH-1217 Meyrin 1-Genf, Schweiz, Telefon (022) 41 54 00