HEWLETT-PACKARD

HP-41C

MATHEMATIK-PAKET

Hinweis

EINLEITUNG

Die Programme des Mathematik-Pakets stammen aus den Gebieten Funktionentheorie, numerische Verfahren, lineare Gleichungssysteme, analytische Geometrie und ausgewählte Funktionen. Jedes Programm dieses Pakets besteht aus einem eigenständigen Programm im Anwender-Modul und einem Abschnitt in dem vorliegenden Bedienungshandbuch. Das Bedienungshandbuch enthält die wichtigsten Gleichungen und die Anweisungen zur Benutzung des Programms. Außerdem werden eines oder mehrere durchgerechnete Beispiele mit der zur Lösung benötigten Liste von Tastenfolgen beigefügt.

Schalten Sie bitte den Rechner dann ab, wenn Sie ein Anwender-Modul einstecken und vergewissern Sie sich, daß Sie mit dem Abschnitt „Einstecken und Entfernen der Anwender-Module" vertraut sind. Wenn Sie ein Programm verwenden wollen, so sollten Sie sich die Zeit nehmen, die Abschnitte „Format der Benutzer-Anweisungen" und „Einige Anmerkungen zur Programm-Verwendung" durchzulesen.

Zunächst sollten Sie ein Programm dadurch kennenlernen, daß Sie es ein- oder zweimal anhand der vollständigen Liste von Benutzeranweisungen durchlaufen lassen. Danach genügen Ihnen sicher die Anzeigen des Programms oder die Kürzel auf den mitgelieferten Masken für das Tastenfeld, aus denen hervorgeht, welche Variablen einzugeben, welche Tasten zu drücken sind und welche Werte ausgegeben werden. Zur Erleichterung Ihrer Arbeit haben wir eine Karte mit Kurzbeschreibungen für jedes Programm - einschließlich der Benutzer-Anweisungen - beigelegt.

Wir hoffen, daß Sie von dem Mathematik-Paket bei der Lösung zahlloser Probleme ihres Fachgebietes unterstützt werden. Eine Bitte noch: Wir sind sehr daran interessiert, Ihre Bewertung der Programme dieses Pakets zu erfahren, weswegen wir einen Fragebogen vorbereitet haben, der sich in der vorderen Umschlagdecke des Bedienungshandbuches befindet. Dürfen wir Sie bitten, diesen Fragebogen mit Ihren Kommentaren zu diesen Programmen auszufüllen? Eben aus Ihren Kommentaren können wir lernen, wie wir die Brauchbarkeit und den Wert unserer Programme verbessern können.

INHALT

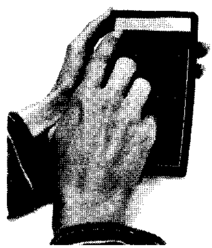
Machen Sie sich bitte mit der nachfolgenden Information vertraut, **bevor** Sie ein Anwender-Modul zum ersten Mal einstecken.
Es können bis zu vier Anwender-Module in die Buchsen des HP-41C eingesteckt werden. Sind diese Module eingesteckt, so können die Namen ihrer Programme durch das Drücken von ■ [CATALOG] 2 in die Anzeige abgerufen werden.

VORSICHT

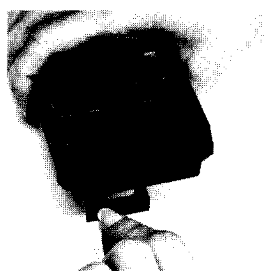
Schalten Sie den HP-41C immer vor dem Einstecken oder Entfernen einer steckbaren Erweiterung (Anwender-Modul oder auch Zubehör) aus. Versäumen Sie das Ausschalten, so kann sowohl der Rechner als auch das Zubehör beschädigt werden.

Im folgenden ist beschrieben, wie Sie ihr Anwender-Modul einstecken müssen:

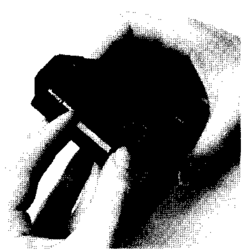
1. Schalten Sie den HP-41C aus! Versäumen Sie dies, so kann außer dem Modul auch der Rechner beschädigt werden.



2. Entfernen Sie die Schutzkappen auf den Buchsen. Bewahren sie die Schutzkappen auf, da freie Buchsen durch diese Kappen verschlossen werden sollen.



3. Stecken Sie das Anwender-Modul in eines der Buchsen, jedoch immer **nach** dem letzten verwendeten Speichererweiterungsmodul.



4. Wollen Sie weitere Anwender-Module einstecken, so können diese in jede beliebige Buchse eingesteckt werden, jedoch immer nach dem letzten Speichererweiterungs-Modul. Haben Sie beispielsweise ein Speichererweiterungs-Modul (RAM) in Buchse 1 eingesteckt, so können Anwender-Module (ROM) nur in die Buchsen 2, 3 und 4 beliebig eingegeben werden. .
   Stecken Sie niemals ein Anwender-Modul in eine Buchse mit niedrigerer Nummer, als ein Speichererweiterungsmodul.
   Vergewissern Sie sich, daß freie Buchsen durch Schutzkappen verschlossen sind.
5. Schalten Sie den Rechner ein und folgen Sie den programmspezifischen Anweisungen dieses Handbuches.

Entfernen der Anwender-Module:

1. Schalten Sie den HP-41C aus! Versäumen Sie dies, so können Rechner und Modul beschädigt werden.
2. Nehmen Sie das entsprechende Modul und ziehen Sie es heraus, wie auf der Abbildung dargestellt.

3. Stecken Sie eine Schutzkappe auf die unbelegte Anschlußbuchse.

MISCHEN VON SPEICHERERWEITERUNGS- (RAM) UND ANWENDER-MODULEN (ROM).

Die Auslegung des HP-41C erfordert es, daß RAM-Module in den Buchsen mit niedrigerer Nummer einzustecken sind. Dies gilt für alle Erweiterungen, auch für solche wie den HP-82104A Kartenleser oder den HP-82143A Drucker.

Verwenden Sie Speichererweiterungs-Module und Anwender-Module, so müssen die Speichererweiterungs-Module immer in die Buchsen mit der niedrigeren Nummer eingeschoben werden, die Anwender-Module in die Buchsen nach dem letzten Speichererweiterungsmodul. Wollen Sie RAMs und ROMs gemischt verwenden, so können Buchsen freigelassen werden. Beispielsweise, steckt in Buchse 1 ein RAM, so kann ein Anwender-Modul in Buchse 4 unter Auslassung der Buchsen 2 und 3 eingeschoben werden.

FORMAT DER BENUTZER-ANWEISUNGEN

Die vollständige Tabelle der Benutzer-Anweisungen - zu jedem Programm gibt es im Bedienungshandbuch eine Tabelle - enthält die Anleitung zur Bedienung eines jeden Programms aus diesem Paket.

Die Tabelle besteht aus fünf beschrifteten Spalten. Von links nach rechts gelesen, enthält die erste Spalte die laufende Nummer der Anweisung.

Die Spalte ANWEISUNG enthält die Anweisung und kommentiert die auszuführenden Schritte.

In der Spalte EINGABE sind die Eingabedaten spezifiziert, gegebenenfalls deren Maßeinheiten oder die entsprechende alphanumerische Reaktion auf eine Ihrer Antworten. Die Tasten für die Dateneingabe sind die Tasten für 0 bis 9 (numerische Tasten), [EEX] (Eingabe **E**xponent) und [CHS] (Vorzeichenwechsel).

Die Spalte FUNKTION gibt die Taste(n) an, die nach der Eingabe der entsprechenden Daten zu drücken sind.

Immer dann, wenn eine Angabe in den Spalten EINGABE oder FUNKTION goldfarben gedruckt ist, ist zuvor die [ALPHA]-Taste zu drücken. Sobald die Informationen eingetastet sind, muß wiederum die [ALPHA]-Taste betätigt werden, um den Rechner in seinem normalen Modus umzuschalten, oder auch um die Programmausführung zu starten. Beispielsweise meint [XEQ] FOUR, daß die Tastenfolge [XEQ][ALPHA]FOUR [ALPHA] zu drücken ist.

Die Spalte ANZEIGE gibt die Reaktionen des Rechners sowie Zwischen- und Endergebnisse mit ihren Maßeinheiten an, sofern dies zutrifft.

Über der Spalte ANZEIGE steht ein Kasten, der die Mindestzahl von Registern (Speicherplätzen) enthält, die zur Programmausführung notwendig sind. Die Seiten 73 bis 117 des Bedienungs- und Programmierhandbuches enthalten detaillierte Informationen darüber, wie man die belegte Anzahl von Registern bestimmt.

Im folgenden ist die Tabelle von Benutzer-Anweisungen des Programms FOURIER-Analyse dargestellt.

				Umfang: 027
Nummer	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Programm initialisieren		[XEQ] FOUR	NO.SAMPLES=?
2.	Anzahl der Stichproben einer Folge eingeben	# Stichp.	[R/S]	NO.FREQ=?
3.	Anzahl gewünschter Frequenzen eingeben	# Freq.	[R/S]	1ST.COEFF=?
4.	Exponent des ersten Koeffizenten (J).	=J	[R/S]	Y1=?
5.	Eingabe von Y_n, n=1, ... ,N	Y_n	[R/S]	Y2=?, ... ,RECT?

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
6.	Schritt 5 wiederholen bis RECT? in der Anzeige erscheint.			
7.	Ist die Antwort ja, drücken der Taste [R/S] um die Koeffizienten für J≦k≦J+ # freqs. in kartesischen Koordinaten auszugeben.		[R/S] [R/S]	a_k= b_k=
	ist die Antwort nein (N), werden die Koeffizienten in Polarform ausgegeben.	N	[R/S] [R/S]	c_k= $_k$=
	drücken von [R/S] zeigt aufeinanderfolgende Koeffizienten an.			
8.	Um den Funktionswert für t zu berechnen, USER-Modus setzen und t eingeben.	t	[USER] [E]	f(t)

EINIGE ANMERKUNGEN ZUR PROGRAMM-VERWENDUNG

KATALOG

Sobald ein Anwender-Modul in eine Buchse des HP-41C eingesteckt ist, kann sein Inhalt durch Drücken von ■ [CATALOG] 2 (der Katalog der Erweiterungen) ausgegeben werden. Drücken der [CATALOG]-Funktion bewirkt, daß eine Liste aller Programme und Funktionen des Moduls aber auch aller Funktionen jeder anderen eingesteckten Erweiterung ausgegeben wird.

MASKEN

Für eine Anzahl der Programme des Pakets wurden Masken beigelegt. Um diese Programme zu benutzen, wählen Sie die entsprechende Maske und legen Sie sie auf den Rechner. Die Bezeichnungen auf den Masken sollen Ihnen bei der Verwendung des Programmes helfen. Der Programmname ist vertikal auf der linken Seite der Maske angegeben. Die Bezeichnungen in blau beziehen sich auf die unmittelbar über ihnen stehenden Tasten, wenn die Maske richtig plaziert ist und der Rechner im USER-Modus betrieben wird. Goldfarbene Bezeichnungen haben die gleiche Bedeutung, nur sind sie oberhalb der entsprechenden Taste angebracht, und zusätzlich ist vorher die Präfix-Taste zu drücken. Um es nochmals zu betonen, der USER-Modus muß eingestellt sein.

ALPHA- und USER-Modus

In diesem Bedienungshandbuch ist eine besondere Notation verwendet, um den ALPHA-Modus zu kennzeichnen. Immer dann, wenn auf der Benutzer-Anweisungs-Tabelle eine Anweisung goldfarben gedruckt ist, muß vor der Anweisung die [ALPHA]-Taste gedrückt werden. Ist die Anweisung eingegeben, ist [ALPHA] nochmals zu drücken, um den Rechner in seinen normalen Betriebszustand zurückzuversetzen oder eine Programmausführung zu starten. So bedeutet [XEQ] FOUR z. B., daß die Tasten [XEQ] [ALPHA] FOUR [ALPHA] zu drücken sind.

Im USER-Modus, bezogen auf die neudefinierten Tasten und deren obere Beschriftung, werden in diesem Bedienungshandbuch die Symbole [A] - [J] und ■ [A] - ■ [E] in Benutzer-Anweisungs-Tabellen und bei gelösten numerischen Beispielen verwendet.

VERWENDUNG DES ZUSÄTZLICHEN DRUCKERS

Ist der als Zubehör erhältliche Drucker an den HP-41C angeschlossen, so werden alle Ergebnisse des Mathematik-Pakets Anwender-Moduls automatisch ausgedruckt. Wünschen Sie zusätzlich noch eine Liste aller Eingabewerte bei einem bestimmten Programm, so schieben Sie den Drucker-Wahlschalter in Stellung NORMAL, bevor Sie das Programm ausführen. In diesem Modus werden alle Eingaben und Tastenfolgen auf dem Drucker gelistet; somit verfügen Sie über eine vollständige Dokumentation der Programmausführung.

PROGRAMME ALS UNTERPROGRAMME

Die Programme des Mathematik-Pakets können als Unterprogramme von Benutzerprogrammen im Speicher des HP-41C aufgerufen werden. Die speziellen Einspringmarken sind im Anhang B beschrieben.

UMSPEICHERN VON PROGRAMMEN AUS MODULEN

Wünschen Sie eine schrittweise Kontrolle bei der Programmausführung (TRACE), Modifikationen oder die Aufzeichnung auf Magnetkarten von Programmen dieses Anwender-Moduls, so muß das Programm zunächst in den Speicher des HP-41C kopiert werden. Erläuterungen zu der HP-41C COPY-Funktion finden sich im Bedienungshandbuch. Für die Ausführung eines Programms ist es nicht notwendig, dieses Programm zu kopieren.

UNTERBRECHUNG DES PROGRAMMLAUFES

Alle Programme wurden so ausgelegt, daß sie richtig arbeiten, wenn sie von Anfang bis Ende durchlaufen, ohne den Rechner abzuschalten. (Beachten Sie dabei bitte, daß sich der Rechner auch selbst abschalten kann.) Wird der HP-41C abgeschaltet, kann es notwendig sein, daß für eine richtige Wiederaufnahme der Programmausführung das Flag 21 (SF21) gesetzt werden muß.

MARKEN

Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß die Verwendung von ALPHA-Marken in einem selbstgeschriebenen Programm dann zu Problemen führen kann, wenn diese Marken identisch mit den Marken im Programm aus dem Anwender-Modul sind.

MATRIXALGEBRA

Dieses Programm berechnet Determinante und Inverse für Matrizen mit einer Dimension von maximal 14 x 14, wobei die Lösungen für Gleichungssysteme mit bis zu 14 Unbekannten bestimmt werden.

Es wird das GAUSSsche Eliminationsverfahren mit modifiziertem Pivot-Verfahren verwendet. Aus Platzgründen kann das Verfahren nicht vollständig dargestellt werden, aber in der einschlägigen Literatur (vgl. Literaturangaben) kann die fehlende Information eingeholt werden.

Das GAUSSsche Eliminationsverfahren besteht aus einer Folge von Zeilenoperationen zweier Typen: Die expandierende Elimination und die Lösung. Während der Eliminationsphase wird die N xN Matrix A in eine obere Dreiecksmatrix U umgewandelt, wobei A als nichtsinguläre Matrix angenommen wird. Die Multiplikatoren, aus denen diese Matrix erstellt wird, bilden eine untere Dreiecksmatrix L, welche 1.0 in der Diagonale enthält. Wenn auf das Pivot-Verfahren, das durch eine Folge von Zeilenvertauschungen zu einer Verbesserung der Genauigkeit bei vielen Gleichungssystemen führt, verzichtet wird, gilt für die Matrizen die Beziehung U = LA. Am Ende diese Programmteils wird Flag 4 gelöscht, damit ist auch die Matrix A in ihrer ursprünglichen Form zerstört. Die ursprünglichen Elemente von A_{ij} sind durch die Elemente von U ($i \leqq j$) und L ($i > j$) ersetzt. Die Rückschätzung in diesem Programm verwendet die transformierten Matrizen U und L für die Determinante und Inverse von A und zur Lösung des Systems homogener Gleichungen.

Gleichungen: (am Beispiel einer 5 x 5 Matrix)

$$\text{Es sei } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}$$

Die Determinante von A, Det A, ergibt sich nach der Transformation nach U als Produkt der Diagonalelemente:

$$\text{Det } A = (-1)^k U_{11} U_{22} U_{33} U_{44} U_{55},$$

wobei k die Anzahl der Zeilen ist, die vertauscht wurden.

Es sei C die Inverse von A, d. h. diejenige 5x5 Matrix, die AC=CA=I erfüllt.

Für I gilt, daß $I_{ij} = 1$ für i=j und 0 andernfalls.

C wird spaltenweise in der folgenden Form bestimmt:

Es sei $c_{\cdot j}$ der j-te Spaltenvektor von C, z. B.:

$$c_{\cdot j} = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ c_{3j} \\ c_{4j} \\ c_{5j} \end{bmatrix}, j = 1,2,3,4,5$$

$c_{\cdot j}$ wird aus der Lösung der Gleichung

$$Ac_{\cdot j} = I_{\cdot j}, \text{ mit } I_{\cdot j} = (1 \text{ für } i=j, o \text{ andernfalls})$$

Beispielsweise wird $c_{\cdot 1}$ durch die Lösung von

$$Ac_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bestimmt.

Ein System von 5 Gleichungen für 5 Unbekannte kann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 + A_{15}x_5 &= B_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 + A_{25}x_5 &= B_2 \\
A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 + A_{35}x_5 &= B_3 \\
A_{41}x_1 + A_{42}x_2 + A_{43}x_3 + A_{44}x_4 + A_{45}x_5 &= B_4 \\
A_{51}x_1 + A_{52}x_2 + A_{53}x_3 + A_{54}x_4 + A_{55}x_5 &= B_5
\end{aligned}$$

wobei die x_j unbekannt und die B_i Konstante sind.

In Matrixnotation wird diese Gleichung zu $Ax = B$, wobei X und B Spaltenvektoren sind:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \text{und } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

Das Problem wird mit $Ux = LB$ gelöst (wobei das Pivotieren vernachlässigt ist).

Anmerkung:

Ein Stop während der Programmausführung mit der Anzeige NO SOLUTION bedeutet, daß die Matrix A singulär ist.

- Das Programm ist für 14x14 Matrizen ausgelegt, allerdings werden ab 7x7 Matrizen Speichererweiterungs-Module benötigt. Konsultieren Sie die Matrix-Register-Karte für den Speicherbedarf verschiedener Matrizen.
- Das Mathematik-Paket muß in eine Buchse nach dem Speichererweiterungs-Modul eingesetzt sein.
- Sind die Elemente von A bereits richtig abgelegt, die Dimensionierung im Register 14 (R_{14}) enthalten, Flag 04 gesetzt und die Flags 06–10 gelöscht, dann kann die initialisierende Antwort ausgelassen und das Pivot-Verfahren durch Drücken von [XEQ] PVT gestartet werden. Soll ein Gleichungssystem gelöst werden, müssen Spaltenregister belegt und Flag 05 gesetzt sein.
- Wird DET als Unterprogramm aufgerufen, wird der Wert der Determinante ins Y-Register übergeben.
- Bei der Eingabe der Matrixelemente darf das Y-Register nicht geändert werden.
- Die besten Ergebnisse werden erzielt, wenn die Matrix die Verfahrensvoraussetzungen erfüllt.

Literatur:

Carnahan, Luther and Wilkes, *Applied Numerical Methods,* John Wiley and Sons, 1969.

George E. Forsythe, Michael A. Malcolm, and Cleve B. Moler, *Computer Methods in Mathematical Computation,* Computer Science Department, Stanford University, 1972.

G. Forsythe and C. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems,* Prentice-Hall, 1967.

C. Moler, "Matrix Computations with Fortran and Paging", Comm. ACM, vol. 15, no. 4, pp. 268-270 (April, 1972).

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		[XEQ] MATRIX	ORDER=?
2.	Spalten/Zeilenzahl (N) eingeben ($N \leq 14$)	N	[R/S]	SET SIZE nnn
3.	Umfang eingeben und weiter		[XEQ] SIZE nnn [R/S]	 A1,1=?
4.	Matrixelemente zeilenweise eingeben (A_{11}, A_{12}, A_{13}, ... A_{21}, A_{22}, A_{23}, ... usw.	A_{11} A_{12} . . .	[R/S] [R/S] . . .	A1,2=? A1,3=? . . .

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
5.	Schritt 4 wiederholen bis alle Elemente eingegeben	A_{NN}	[R/S]	0.0000
6.	Nach Bedarf: Matrix ausgeben		[XEQ] VMAT	A1,1=
			[R/S]	A1,2=
		.	.	.
		.	.	.
			[R/S]	AN,N=
7.	Nach Bedarf: Matrix abändern		[XEQ] EDIT	ROW↑COL=?
7.a	Eingabe von Zeile (I) und Spalte (J) des abzuändernden Elementes	I	[ENTER↑]	
		J	[R/S]	AI,J=?
7.b	neuen Wert eingeben	A_{ij}	[R/S]*	AI,J=
			[R/S]*	ROW↑ COL=?
7.c	Schritte Nr. 7a und 7b wiederholen, wie benötigt.			
7.d	Ende Änderung		[R/S]	0.0000
8.	Determinante berechnen		[XEQ] DET	DET=
9.	Inverse bestimmen (spaltenweise)		[XEQ] INV	C1,1=
			[R/S]	C2,1=
			:	:
			.	.
			[R/S]	CN,N=
10.	Für die Lösung simultaner Gleichungen,		[XEQ] SIMEQ	B1=?
	Spaltenvektor B eingeben	B_1	[R/S]	B2=?
		:	:	:
		.	.	.
		B_N	[R/S]	0.0000
11.	Gleichungssystem lösen		[R/S]	X1= ≙ a
			:	:
			.	.
			[R/S]	XN= ≙ a
12.	Nach Bedarf: Ausgabe der Spalte		[XEQ] VCOL	B1=
			[R/S]	B2=
			:	:
			.	.
			[R/S]	BN=

*Ein zusätzliches Drücken von [R/S] wird benötigt, wenn kein Drucker angeschlossen ist.

Beispiel 1:

Gesucht sind Determinante und Inverse der folgenden Matrix:

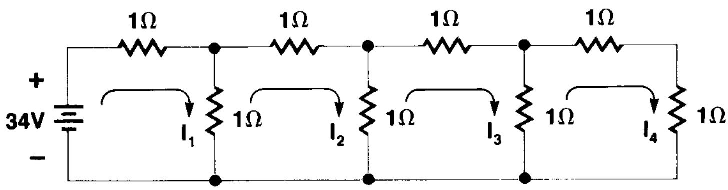
$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Tasten:	**Anzeige:**	
[XEQ] [ALPHA] MATRIX [ALPHA]	*ORDER=?*	
5 [R/S]	*SET SIZE 50*	(bedeutet, daß weniger als 50 Register aktuell verfügbar sind)
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 050		
[R/S]	*A1, 1=?*	
6 [R/S] 3 [R/S] 2 [CHS] [R/S] 2 [R/S]		
3 [R/S] 1 [R/S] 4 [R/S] 3 [CHS] [R/S]		
4 [R/S] 2 [R/S] 2 [R/S] 3 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 2 [CHS] [R/S] 9 [R/S]		
4 [R/S] 3 [R/S] 0 [R/S] 2 [R/S] 1 [R/S]		
3 [R/S] 5 [R/S] 6 [CHS] [R/S]		
6 [R/S] 2 [R/S]	*0.0000*	
[XEQ] [ALPHA] DET [ALPHA]	*DET=-200.0000*	(Det A)
[XEQ] [ALPHA] INV [ALPHA]	*C1, 1=0.2000*	
[R/S]	*C2, 1=-1.7500*	
[R/S]	*C3, 1=0.7000*	
[R/S]	*C4, 1=1.7250*	
[R/S]	*C5, 1=1.0000*	
[R/S]	*C1, 2=-0.1200*	
[R/S]	*C2, 2=-2.0000*	
[R/S]	*C3, 2=1.2800*	
[R/S]	*C4, 2=2.5400*	
[R/S]	*C5, 2=1.4000*	
[R/S]	*C1, 3=-0.0400*	
[R/S]	*C2, 3=0.5000*	
[R/S]	*C3, 3=-0.2400*	
[R/S]	*C4, 3=-0.5700*	
[R/S]	*C5, 3=-0.2000*	

Tasten:	**Anzeige:**
[R/S]	*C1, 4=-6.0000 E-10*
[R/S]	*C2, 4=1.7500*
[R/S]	*C3, 4=-0.5000*
[R/S]	*C4, 4=-1.6250*
[R/S]	*C5, 4=-1.0000*
[R/S]	*C1, 5=-1.0000 E-10*
[R/S]	*C2, 5=1.5000*
[R/S]	*C3, 5=-1.0000*
[R/S]	*C4, 5=-1.7500*
[R/S]	*C5, 5=-1.0000*

Beispiel 2:

Unter Anwendung der Schleifentechnik auf den untenstehenden Schaltkreis sind die Ströme I_1, I_2, I_3 und I_4 zu bestimmen.



Die zu lösenden Gleichungen lauten:

$$
\begin{array}{cccccc}
2I_1 & -I_2 & & & = & 34 \\
-I_1 & +3I_2 & -I_3 & & = & 0 \\
 & -I_2 & +3I_3 & -I_4 & = & 0 \\
 & & -I_3 & +3I_4 & = & 0
\end{array}
$$

In Matrixnotation:

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 34 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Tasten:	Anzeige:	
[XEQ] [ALPHA] MATRIX [ALPHA]	*ORDER=?*	
4 [R/S]	*A1,1=?*	(es wird weiterhin ein Umfang von 050 angenommen.)
2 [R/S] 1 [CHS] [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 3 [R/S] 1 [CHS] [R/S]		
0 [R/S] 0 [R/S] 1 [CHS] [R/S] 3 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S]		
1 [CHS] [R/S] 3 [R/S]	*0.0000*	
[XEQ] [ALPHA] SIMEQ [ALPHA]	*B1=?*	
34 [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S] 0 [R/S]	*0.0000*	
[R/S]	*X1=21.0000*	
[R/S]	*X2=8.0000*	
[R/S]	*X3=3.0000*	
[R/S]	*X4=1.0000*	

LÖSUNGEN FÜR F(x)=0 IN EINEM INTERVALL

Dieses Programm verwendet einen modifizierten Sekanten-Algorithmus, um reelle Lösungen der Gleichung f(x)=0 zu bestimmen. Der Anwender muß die Funktion eingeben und kann zwei Startwerte (x_1 und x_2) angeben, die nahe an der gewünschten Lösung liegen sollen. Wird das Intervall anfangs nicht definiert, so wird ein Anfangsintervall zwischen 1 und 10 angenommen.

Gilt $f(x_1) \cdot f(x_2) \leqq 0$ und ist die Funktion im Intervall stetig, so wird immer eine Lösung gefunden. Gilt dagegen $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, kann die Suche nach einer Lösung erfolglos sein. Existiert mehr als eine Lösung im betrachteten Intervall, so wird eine Lösung bestimmt und der Benutzer kann ein kleineres Intervall definieren und das Programm wiederholen.

Die Funktion f(x) kann unter jeder beliebigen **globalen** Marke - mit höchstens 6 Zeichen Länge - eingegeben werden, es wird jeweils x zu Anfang im X-Register erwartet. Es können mehrere Funktionen in den Programmspeicher geladen werden, da der Name der zu bestimmenden Funktion vom Programm erfragt wird. Das Programm belegt die Register 00-06. Die restlichen Register und der Stack sind für die Definition von f(x) frei.

				Umfang: 007
Nummer	**Anweisung**	**eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Funktionseingabe vorbereiten		[GTO] [•] [•]	
2.	[PRGM]-Mode einstellen, Funktion unter dem gewünschten Label ablegen; [RTN] hinzufügen und [PRGM]-Mode ausschalten.		[PRGM] [LBL] . . . [RTN] [PRGM]	
3.	Programm initialisieren		[XEQ] SOLVE	FUNCTION NAME?
4.	Funktionsnamen eingeben, (ALPHA-Modus ist in Schritt 3 gesetzt)	Name	[R/S]	GUESS 1=?
5.	Falls zwei Anfangsschätzungen eingegeben werden sollen, ersten Wert eingeben, ansonsten weiter mit Schritt 7	x_1	[R/S]	GUESS 2=?
6.	zweite Anfangsschätzung eingeben	x_2	[R/S]	(vgl. Anm.)
7.	Programm ausführen		[R/S]	(vgl. Anm.)
8.	um eine andere Lösung zu bestimmen ist [R/S] zu drücken. Für weitere Berechnungen weiter mit Schritt 1 oder 3. **Anm.:** Es gibt drei Arten der normalen Beendigung des Programmes. Es erscheinen dabei die folgenden Meldungen: 1) keine Lösung gefunden 2) Lösung ist <Wert> 3) Lösung liegt zwischen <Wert 1> und <Wert 2>			
9.	Bei Verwendung als Subroutine (sofern die Anfangsschätzungen bereits eingegeben), können die Schritte 3-9 durch Drücken von [XEQ] SOL übersprungen werden.			

Beispiel 1:

Gesucht sind die Lösungen für $\ln x + 3x - 10.8074 = 0$. f(x) ist durch [LBL] FF definiert.

Tasten:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 007	
[GTO] [•] [•]	
[PRGM]	
[LBL] [ALPHA] FF [ALPHA]	
[LN]	
[LASTX]	
3 [×] [+]	
10.8074 [−]	
[RTN]	
[PRGM]	
[XEQ] [ALPHA] SOLVE [ALPHA]	***FUNCTION NAME?***
FF [R/S]	***GUESS 1 =?***
[R/S]	***ROOT IS 3.2134***

Beispiel 2:

Es ist derjenige Winkel α zwischen 100 und 101 Rad gesucht, für den $\sin \alpha = 0.01$ ist. Somit ist $f(x) = \sin x - 0.01$. Verwenden Sie dabei [LBL] ANGLE.

Tasten:	**Anzeige:**
[GTO] [•] [•]	
[PRGM]	
[LBL] [ALPHA] ANGLE [ALPHA]	
[XEQ] [ALPHA] RAD [ALPHA]	
[SIN]	
.01 [−]	
[XEQ] [ALPHA] DEG [ALPHA]	
[RTN]	
[PRGM]	
[XEQ] [ALPHA] SOLVE [ALPHA]	***FUNCTION NAME?***
ANGLE [R/S]	***GUESS 1 =?***
100 [R/S]	***GUESS 2 =?***
101 [R/S]	***ROOT IS BETWEEN 100.5410***
[R/S]	***AND 100.5410***

Sollen mehr signifikante Ziffern angezeigt werden, drücken Sie [FIX] 9 und [x⇄y] .

Beispiel 3:

Gesucht sind die Lösungen von $x^2 + 1 = 0$ unter Verwendung von [LBL] CC:

Tasten:	Anzeige:
[GTO] [•] [•]	
[PRGM]	
[LBL] [ALPHA] CC [ALPHA]	
[x^2] 1 [+]	
[RTN]	
[PRGM]	
[XEQ] [ALPHA] SOLVE [ALPHA]	***FUNCTION NAME?***
CC [R/S]	***GUESS 1 =?***
[R/S]	***NO ROOT FOUND***

NULLSTELLEN UND FUNKTIONSWERTE VON POLYNOMEN

Dieses Programm kann zur Bestimmung von reellen Nullstellen bei Polynomen höchstens fünften Grades verwendet werden, wenn der Koeffizient des Terms mit höchstem Grade 1 ist. Die Gleichung lautet demnach:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \qquad n = 2, 3, 4 \text{ or } 5.$$

Ist der führende Koeffizient ungleich 1, so muß – durch Division der gesamten Gleichung mit diesem Koeffizienten – dieser zu 1 gemacht werden.

Beim Initialisieren des Programms ist der Polynomgrad (n) vom Benutzer anzugeben. Der Rechner erfragt dann die Koeffizienten a_{n-}, ... , a_1, a_0. Sind die Koeffizienten gleich Null, so ist dies anzugeben. Die Koeffizienten sind in den Registern 00-04 gespeichert.

Gleichungen:

Die Routinen für Gleichungen dritten ~~vierten~~ und fünften Grades verwenden ein Iterationsverfahren, um eine reelle Lösung der Gleichung zu finden. Für diesen Fall darf a_0 nur ungleich 0 sein. (Ist $a_0 = 0$, dann ist Null eine reelle Lösung und damit kann der Grad des Polynoms durch Abdivision von x um 1 reduziert werden.) Sobald eine Nullstelle gefunden ist, wird die Gleichung durch synthetische Division auf eine Gleichung zweiten oder vierten Grades reduziert.

Zur Lösung der Gleichung vierten Grades muß zuerst die kubische Gleichung

$$y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

gelöst werden, wobei

$$b_2 = -a_2$$
$$b_1 = a_3a_1 - 4a_0$$
$$b_0 = a_0(4a_2 - a_3^2) - a_1^2 \text{ ist.}$$

Es sei y_0 die größte Lösung der obigen Gleichung dritten Grades.

Damit kann die Gleichung vierten Grades in zwei quadratische Gleichungen zerlegt werden:

$$x^2 + (A + C)x + (B + D) = 0$$
$$x^2 + (A - C)x + (B - D) = 0$$

wobei $A = \frac{a_3}{2}$, $B = \frac{y_0}{2}$, $D = \sqrt{B^2 - a_0}$, $C = \sqrt{A^2 - a_2 + y_0}$

ist.

Lösungen für die Gleichung vierten Grades ergeben sich aus der Lösung der beiden quadratischen Gleichungen.

Eine quadratische Gleichung $x^2 + a_1x + a_0 = 0$ wird nach der Formel

$-\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$. gelöst. Ist $D = \frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0$, sind die Lösungen reell; ist $D<0$, sind die Lösungen komplex nach: $u \pm iv = -\frac{a_1}{2} \pm i\sqrt{-D}$.

Eine reelle Lösung wird als einzelne Zahl ausgegeben. Komplexe Nullstellen erscheinen immer als Paare der Form u±iv und sind in der Ausgabe bezeichnet.

Anmerkung:

- Lange Programmlaufzeiten sind für Gleichungen 3.-, 4.- oder 5-ten Grades zu erwarten, da diese ein- oder mehrfach eine Iteration durchlaufen.
- Das Programm belegt die Register 00-22

				Umfang: 023
Nummer	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Programm initialisieren		XEQ POLY	DEGREE=?
2.	Grad des Polynoms eingeben (n=2, 3, 4, 5)	n	R/S	a(n-1)=?
3.	Koeffizienten a_n-1 eingeben Koeffizienten= 0 müssen als 0 eingegeben werden. Schritt wiederholen, bis a_0 in der Anzeige erfragt wird.	a_n-1 . . .	R/S	a(n-2)=?
		a_1	R/S	a0=?
4.	Koeffizienten a_0 eingeben	a_0	R/S	ROOTS?
5.	Für Lösungen ist R/S zu drücken, es werden dann alle Lösungen richtig bezeichnet. Weiter mit Schritt 9		R/S R/S R/S R/S R/S	ROOT= U= V= U= -V=
6.	für den Funktionswert ist mit Nein (N) zu antworten	N	R/S	X=?
7.	x eingeben, f(x) wird angezeigt	x	R/S	F<X>=
8.	für ein neues x; x eingeben und R/S drücken	x	R/S	F<X>=
9.	für ein neues Polynom gleichen Grades weiter mit Schritt 1 oder andern der entsprechenden Koeffizienten in den Registern 00-04 und XEQ ROOTS			

Beispiel 1:

Gesucht sind die Nullstellen von $x^5 - x^4 - 101x^3 + 101x^2 + 100x - 100 = 0$

Tasten:	Anzeige:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 023		
[XEQ] [ALPHA] POLY [ALPHA]	***DEGREE=?***	
5 [R/S]	***a4=?***	
1 [CHS] [R/S]	***a3=?***	
101 [CHS] [R/S]	***a2=?***	
101 [R/S]	***a1=?***	
100 [R/S]	***a0=?***	
100 [CHS] [R/S]	***ROOTS?***	
[R/S]	***ROOT=10.0000***	(Lösung 1)
[R/S]	***ROOT=1.0000***	(Lösung 2)
[R/S]	***ROOT=1.0000***	(Lösung 3)
[R/S]	***ROOT=-1.0000***	(Lösung 4)
[R/S]	***ROOT=-10.0000***	(Lösung 5)

Beispiel 2:

Es ist $4x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 10x + 22 = 0$ zu lösen. Die Gleichung muß zu $x^4 - 2x^3 - \frac{13}{4}x^2 - \frac{10}{4}x + \frac{22}{4} = 0$ umgeformt werden.

Tasten:	Anzeige:	
[XEQ] [ALPHA] POLY [ALPHA]	***DEGREE=?***	
4 [R/S]	***a3=?***	
2 [CHS] [R/S]	***a2=?***	
13 [ENTER↑] 4 [÷] [CHS] [R/S]	***a1=?***	
10 [ENTER↑] 4 [÷] [CHS] [R/S]	***a0=?***	
22 [ENTER↑] 4 [÷] [R/S]	***ROOTS?***	
[R/S]	***U=-1.0000***	(Die Lösungen 1 und 2
[R/S]	***V=1.0000***	sind -1.00 ± 1.00 i)
[R/S]	***U=-1.0000***	
[R/S]	***-V=-1.0000***	
[R/S]	***ROOT=3.1180***	(Lösung 3)
[R/S]	***ROOT=0.8820***	(Lösung 4)

Beispiel 3:

Wie verändern sich die Lösungen, wenn der Koeffizient von x^2 von -13/4 in -5 geändert wird?

Tasten:	Anzeige:	
5 [CHS] [STO] 02		
[XEQ] [ALPHA] ROOTS [ALPHA]	*U=-1.1386*	(Lösungen 1 und 2 sind -1.1386 ± .8555 i)
[R/S]	*V=0.8555*	
[R/S]	*U=-1.1386*	
[R/S]	*-V=-0.8555*	
[R/S]	*ROOT=3.5031*	(Lösung 3)
[R/S]	*ROOT=0.7741*	(Lösung 4)

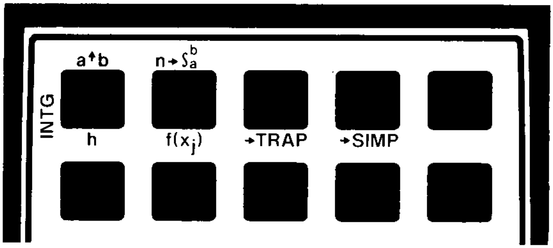
Beispiel 4:

Es sind die Funktionswerte des Polynoms

$f(x) = x^5 + 5x^4 - 3x^2 - 7x + 11$ an den Stellen x=2.5 und x=-5.0 zu bestimmen.

Tasten:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] POLY [ALPHA]	*DEGREE=?*
5 [R/S]	*a4=?*
5 [R/S]	*a3=?*
0 [R/S]	*a2=?*
3 [CHS] [R/S]	*a1=?*
7 [CHS] [R/S]	*a0=?*
11 [R/S]	*ROOTS?*
N [R/S]	*X=?*
2.5 [R/S]	*F<X>=267.7188*
5 [CHS] [R/S]	*F<X>=-29.0000*

NUMERISCHE INTEGRATION



Dieses Programm leistet numerische Integration für den Fall, daß eine Funktion explizit oder nur an einer endlichen Zahl abstandsgleicher Stützstellen (diskreter Fall) definiert ist. Die Integrale expliziter Funktion werden nach der SIMPSONschen Regel bestimmt; für diskrete Fälle wird entweder nach der Trapezregel angenähert oer auch die SIMPSONsche Regel angewendet.

Diskreter Fall

Es seien $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ n abstandsgleiche Punkte (mit $xj= x_0+jh, j=1,2 \ldots, n$), denen die bekannten Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ zugehören. Die Funktion f(x) selbst muß nicht bekannt sein. Nach der Eingabe der Schrittweite h und der Funktionswerte $f(x_j), j=0, 1, 2, \ldots, n$ wird das Integral

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

entweder nach der Trapezregel angenähert:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

oder nach SIMPSON geschätzt:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) +$$

$$\ldots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

Um die SIMPSONsche Regel anwenden zu können, muß n gerade sein. Ist n ungerade, stoppt der Rechner mit der Anzeige **N NOT EVEN,** sobald $\boxed{D}$ gedrückt wird.

Explizite Funktionen

Ist die Gestalt der Funktion f(x) bekannt, so kann die Funktion im Programmspeicher abgelegt und nach SIMPSON numerisch integriert werden. Der Benutzer muß die Intervallgrenzen a und b, sowie die Zahl der Teilintervalle n , in die (a,b) zerlegt wird, angeben. Dieses n muß gerade sein, andernfalls wird **N NOT EVEN** angezeigt. Das Programm wird fortgesetzt mit

$x_0 = a,\ x_j = x_0 + jh,\ j = 1, 2, \ldots, n-1,$ und $x_n = b$, wobei

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ ist.}$$

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ wird nach der obigen SIMPSONschen Regel angenähert.

Die Funktion f(x) kann unter Verwendung einer beliebigen, maximal 6 Zeichen langen, **globalen** Marke in den Programmspeicher eingegeben werden, wobei x im X-Register erwartet wird. Es können mehrere Funktionen in den Programmspeicher eingegeben werden, da der Funktionsname vom Programm vorher erfragt wird. Das Programm belegt die Register 00-07; die übrigen Register stehen für die Definition von $f_i(x)$ zur Verfügung.

				Umfang: 008
Nummer	**Anweisungen**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Maske auf Rechner legen			
2.	für explizite Funktionen weiter mit Schritt 9, für den diskreten Fall weiter mit Schritt 3			
	DISKRETER FALL			
3.	Programm initialisieren		XEQ INTG	0.0000
4.	Abstand zwischen den x-Werten eingeben	h	A	h
5.	Funktionswerte für x_j eingeben Schritt für j=0,1, ... n wiederholen	$f(x_j)$	B	j
6.	Fläche nach Trapezregel bestimmen		C	TRAP∫
7.	Fläche nach SIMPSON bestimmen (n gerade)		D	SIMP∫
8.	für weitere Berechnungen weiter mit Schritt 2			
	EXPLIZITE FUNKTIONEN			
9.	Funktionseingabe vorbereiten		GTO • •	

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
10.	In [PRGM]-Modus schalten; Funktion unter gewünschter Marke eingeben; nach [RTN] wieder PRGM-Modus ausschalten.		[PRGM] [LBL] _ ⋮ [RTN] [PRGM]	
11.	Programm initialisieren		[XEQ] INTG	
12.	Intervallgrenzen a und b eingeben	a b	[ENTER↑] ■ [A]	 a
13.	Anzahl der Teilintervalle n eingeben (n gerade) und Fläche nach SIMPSON berechnen.	n	■ [B]	FUNCTION NAME?
14.	Funktionsnamen eingeben	$Name_i$	[R/S]	$_a\int^b$ fi(x)dx
15.	sollen a, b oder n geändert werden, mit entsprechenden Schritt fortsetzen; für weitere Berechnungen nach Schritt 2 gehen.			

Beispiel 1:

Gegeben seien die untenstehenden acht Werte für $f(x_j)$, j= 0,1,2,...,8; gesucht sind die Näherungen des Integrals

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

nach Trapez- und SIMPSONscher Regel. Der Wert für h ist 0.25.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	.25	.5	.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x_i)$	2	2.8	3.8	5.2	7	9.2	12.1	15.6	20

Tasten:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 008	
[XEQ] [ALPHA] INTG [ALPHA]	*0.0000*

Tasten:	Anzeige:	
.25 [A] 2 [B]		
2.8 [B] 3.8 [B]		
5.2 [B] 7 [B]		
9.2 [B] 12.1 [B]		
15.6 [B] 20 [B]		
[C]	***16.6750***	(Trapezoidal)
[D]	***16.5833***	(Simpson's)

Beispiel 2:

Gesucht ist der Funktionswert von

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \cos x + 0.25}$$

für n=10 und n=30. Man beachte, daß x in Rad erwartet wird. Es ist eine gute Gewohnheit, am Anfang der Routine den Winkelmodus auf Rad und am Ende der Routine wieder auf Grad zu schalten, wenn hauptsächlich in Grad gearbeitet wird. Die Funktion soll unter [LBL] FF eingegeben werden.

Tasten:	Anzeige:	
[GTO] [•] [•]		
[PRGM]		
[LBL] [ALPHA] FF [ALPHA]		
[XEQ] [ALPHA] RAD [ALPHA]		
[COS]		
1 [x≷y] [−]		
.25 [+] [1/X]		
[XEQ] [ALPHA] DEG [ALPHA]		
[RTN]		
[PRGM]		
[XEQ] [ALPHA] INTG [ALPHA]		
0 [ENTER↑] 2 [π] [×] ■ [A]		
10 ■ [B]	***FUNCTION NAME?***	
FF [R/S]	***8.2193***	(n=10)
30 ■ [B]	***FUNCTION NAME?***	
FF [R/S]	***8.3774***	(n=30)

Die exakte Lösung ist $\frac{8\pi}{3} = 8.3776$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dieses Programm berechnet Ableitungen ersten und zweiten Grades nach der Methode von RUNGE-KUTTA. Eine Ableitung ersten Grades ist von der Form $y'=f(x,y)$, mit den Anfangswerten x_0, y_0 und y_0.
In jedem Fall kann die Funktion f(x) in den Programmspeicher unter einer beliebigen, maximal 6 Zeichen langen, **globalen** Marke eingegeben werden. Die Werte x und y werden im X- bzw. Y-Register erwartet; y' wird im Z-Register bei Ableitungen zweiten Grades erwartet. Das Modul-Programm belegt die Register 00-07. Die verbleibenden Register stehen für die Definition der Funktion zur Verfügung.

Die Lösung ist ein numerischer Wert, bei dem y_i für $x_i = x_0 + ih$ $(i=1,2,\ldots)$ für ein vom Benutzer zu bestimmendes Inkrement berechnet wird. Der Wert für h kann zu jeder Zeit während der Programmausführung geändert werden, man speichert dazu h/2 in das Register 01. Dies erlaubt Lösungen der Gleichung beliebig nahe an einem ihrer Pole $(y \to \pm\infty)$.

Gleichungen:

Erste Ableitung:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)$$

wobei

$$c_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$c_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{c_1}{2}\right)$$

$$c_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{c_2}{2}\right)$$

$$c_4 = hf(x_i + h, y_i + c_3)$$

Zweite Ableitung:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[y_i' + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)\right]$$

$$y'_{i+1} = y_i' + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf\,(x_i,\ y_i,\ y_i')$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}\,y_i' + \frac{h}{8}k_1,\ y_i' + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}\,y_i' + \frac{h}{8}k_1,\ y_i' + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_i + h,\ y_i + hy_i' + \frac{h}{2}\,k_3,\ y_i' + k_3\right)$$

Anmerkung:

- Werden die Werte für eine zweite Ableitung eingegeben, so müssen die Werte von x_o und y_o vor dem Wert für y_o eingegeben werden. Alle Werte müssen eingegeben werden, auch wenn sie gleich Null sind.

				Umfang: 008
Nummer	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Funktionseingabe vorbereiten f(x,y,y')		[GTO] [•] [•]	
2.	PRGM-Modus einschalten, Funktion unter der gewünschten Marke eingeben; nach [RTN] den PRGM-Modus ausschalten.		[PRGM] [LBL] . . [RTN] [PRGM]	
3.	Programm intialisieren		[XEQ] DIFEQ	FUNCTION NAME?
4.	Namen der Funktion eingeben	Name	[R/S]	ORDER=?
5.	Eingabe ob 1. oder 2. Ableitung (1 oder 2)	1 oder 2	[R/S]	STEP SIZE=?
6.	Schrittweite h eingeben	h	[R/S]	X0=?
7.	Anfangswert für x eingeben	x_0	[R/S]	Y0=?
8.	Anfangswert für y eingeben	y_0	[R/S]	x_1 or Y0.=?
9.	für eine zweite Ableitung (Abl. 2. Ordnung) Anfangswert für y' eingeben.	y_0	[R/S]	x_1
10.	Ausgabe der Werte für x und y nacheinander		[R/S] [R/S] [R/S]	y_1 x_2 y_2 etc.

Beispiel 1:

Unter Verwendung von [LBL] FX, soll die Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \frac{\sin x + \tan^{-1}(y/x)}{y - \ln(\sqrt{x^2 + y^2})}$$

numerisch bestimmt werden, wobei $x_0=y_0=1$. Der Winkelmodus muß auf RAD gesetzt werden. Außerdem werden drei weitere Speicherregister für die Definition der Funktion benötigt.

Tasten:	Anzeige:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 011		
[GTO] [•] [•]		
[PRGM]		
[LBL] [ALPHA] FX [ALPHA]		
[XEQ] [ALPHA] RAD [ALPHA]		
[STO] 08		
[x≷y]		
[STO] 09		
[x≷y]		
[R-P]		
[LN]		
[STO] 10		
[R↓]		
[RCL] 08		
[SIN]		
[+]		
[RCL] 09		
[RCL] 10		
[−]		
[÷]		
[XEQ] [ALPHA] DEG [ALPHA]		
[RTN]		
[PRGM]		
[XEQ] [ALPHA] DIFEQ [ALPHA]	*FUNCTION NAME?*	
FX [R/S]	*ORDER=?*	
1 [R/S]	*STEP SIZE=?*	
.5 [R/S]	*XO=?*	
1 [R/S]	*YO=?*	
1 [R/S]	*1.5000*	(x_1)
[R/S]	*2.0553*	(y_1)
[R/S]	*2.0000*	(x_2)

Tasten:	Anzeige:	
[R/S]	***2.7780***	(y_2)
[R/S]	***2.5000***	(x_3)
[R/S]	***3.2781***	(y_3)
	etc.	

Beispiel 2:

Unter Verwendung von [LBL] DIF, soll die Gleichung 2. Ordnung

$$(1 - x^2)y'' + xy' = x$$

gelöst werden, wobei $x_0=y_0=y_0=0$ und $h = 0.1$.

Man formuliert die Gleichung um zu:

$$y'' = \frac{x(1 - y')}{1 - x^2} = \frac{x(y' - 1)}{x^2 - 1} \qquad x \neq 1$$

Tasten:	Anzeige:	
[GTO] [•] [•]		
[PRGM]		
[LBL] [ALPHA] DIF [ALPHA]		
[STO] 08		
[R↓] [R↓]		
1 [−]		
[RCL] 08		
[×]		
[LASTX]		
[x²]		
1 [−] [÷]		
[RTN]		
[PRGM]		
[XEQ] [ALPHA] DIFEQ [ALPHA]	***FUNCTION NAME?***	
DIF [R/S]	***ORDER=?***	
2 [R/S]	***STEP SIZE=?***	
.1 [R/S]	***XO=?***	
0 [R/S]	***YO=?***	
0 [R/S]	***YO.=?***	
0 [R/S]	***0.1000***	(x_1)

Tasten:	Anzeige:	
[R/S]	*0.0002*	(y_1)
[R/S]	*0.2000*	(x_2)
[R/S]	*0.0013*	(y_2)
[R/S]	*0.3000*	(x_3)
[R/S]	*0.0046*	(y_3)
[R/S]	*0.4000*	(x_4)
[R/S]	*0.0109*	(y_4)
	etc.	

FOURIER-ANALYSE

Jede periodische Funktion kann – unter Verwendung der nachfolgenden Formeln – als Folge von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi tk}{T} + b_k \sin \frac{2\pi tk}{T} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \left(\frac{2\pi tk}{T} - \theta_k \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi tk}{T} \, dt, k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi tk}{T} \, dt, k = 1, 2, \ldots$$

$$c_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

$$\theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{b_k}{a_k} \right)$$

T = Periodizität von f(t)

Dieses Programm bestimmt die Fourier-Koeffizienten für diskrete Fälle der obigen Formeln, wenn eine große Zahl von Stichproben der periodischen Funktion gegeben ist. Bis zu zehn aufeinanderfolgende Koeffizientenpaare können auf einmal aus N abstandsgleichen Punkten berechnet werden. Die Koeffizienten können sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in Polarform dargestellt werden.

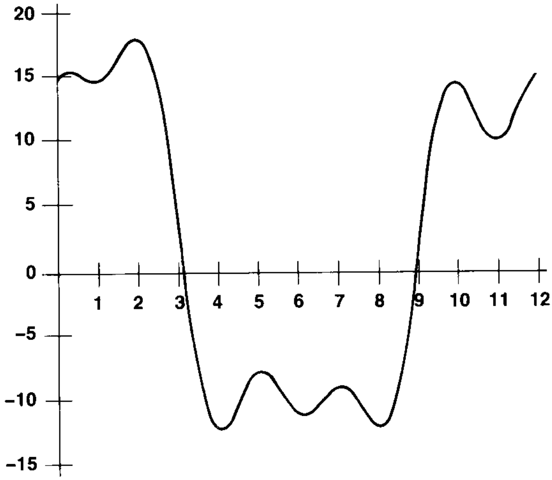
Der Wert für N sollte so gewählt werden, daß er mindestens doppelt so groß ist wie der höchste erwartete Wert der Grundfunktion, die in der periodischen Funktion vorliegt. Eine zu geringe Schätzung für N bewirkt, daß eine Hälfte des Stichprobenintervalls mit einer niedrigeren Frequenz überschätzt wird (ein Umstand der als 'aliasing' bekannt ist).

Die Register 00-26 sind vom Programm belegt.

				Umfang: 027
Nummer	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Programm initialisieren		[XEQ] FOUR	NO.SAMPLES=?
2.	Anzahl der Stichproben in einer Periode eingeben	#Stichp.	[R/S]	NO.FREQ=?
3.	Anzahl der gewünschten Frequenzen eingeben	# Frequ.	[R/S]	1ST COEFF=?
4.	Exponent der ersten Funktion (J) eingeben	J	[R/S]	Y1=?...RECT?
5.	y_n mit $n=1, 2, \dots, N$ eingeben	y_n	[R/S]	Y2=?...RECT?
6.	Schritt 5 wiederholen bis RECT? in der Anzeige			
7.	Ist die Antwort ja, muß [R/S] gedrückt werden, um die Koeffizienten für $J \leq k \leq J + \#$ Frequ. in kartesischen Koordinaten auszugeben.		[R/S] [R/S]	a_k b_k
	Ist die Antwort Nein (N), sollen N die Koeffizienten in Polarkoordinaten ausgegeben werden.	N	[R/S] [R/S]	c_k= $\sphericalangle_k$=
	durch drücken von [R/S] werden aufeinanderfolgende Koeffizienten angezeigt.			
8.	um den Wert der Fourierreihe zum Zeitpunkt t zu bestimmen, ist der USER-Modus zu setzen und t einzugeben.	t	[USER] [E]	f(t)

Beispiel:

Es ist eine Fourier-Serie für die unten gezeigten Wellenformen zu bestimmen. Da 12 Stichproben vorliegen, werden 7 Frequenzen ausgewählt (DC-Term und 6 harmonische Funktionen). Die Koeffizienten sind als Polarkoordinaten darzustellen.



t	f(t)
1	14.758
2	17.732
3	2
4	-12.
5	- 7.758
6	-11
7	- 9.026
8	-12.
9	2
10	14.268
11	10.026
12	15

Tasten:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 027	
[XEQ] [ALPHA] FOUR [ALPHA]	***NO. SAMPLES=?***
12 [R/S]	***NO. FREQ=?***
7 [R/S]	***1ST COEFF=?***
0 [R/S]	***Y1=?***

Tasten:	Anzeige:
14.758 [R/S]	*Y2=?*
17.732 [R/S]	*Y3=?*
2 [R/S]	*Y4=?*
12 [CHS] [R/S]	*Y5=?*
7.758 [CHS] [R/S]	*Y6=?*
11 [CHS] [R/S]	*Y7=?*
9.026 [CHS] [R/S]	*Y8=?*
12 [CHS] [R/S]	*Y9=?*
2 [R/S]	*Y10=?*
14.268 [R/S]	*Y11=?*
10.026 [R/S]	*Y12=?*
15 [R/S]	*RECT?*
[R/S]	*a0=4.0000*
[R/S]	*b0=0.0000*
[R/S]	*a1=14.9998*
[R/S]	*b1=1.0000*
[R/S]	*a2=3.0000E-8*
[R/S]	*b2=1.0000*
[R/S]	*a3=-5.0000*
[R/S]	*b3=1.0000*
[R/S]	*a4=3.3333E-9*
[R/S]	*b4=3.2000E-9*
[R/S]	*a5=3.0002*
[R/S]	*b5=1.4673E-5*
[R/S]	*a6=0.0000*
[R/S]	*b6=2.3599E-8*

Somit ist $f(t) = 2 + 15 \cos\frac{2\pi t}{12} + \sin\frac{2\pi t}{12}$

$$+ \sin\frac{4\pi t}{12}$$

$$- 5 \cos\frac{6\pi t}{12} + \sin\frac{6\pi t}{12}$$

$$+ 3 \cos\frac{10\pi t}{12}$$

KOMPLEXE OPERATIONEN

Dieses Programm gilt für verkettete Operationen mit komplexen Zahlen in kartesischer Form. Neben den vier Grundrechnungsarten für komplexe Zahlen (+, -, x, :) sind die gebräuchlichsten Funktionen der komplexen Zahlen z und w ($|z|$, $1/z$, z^n, $z^{1/n}$, e^z, lnz, sinz, cosz, tanz, a^z, $\log a^z$, $z^{1/w}$ und z^w) enthalten. Funktionen und Operationen können gemischt werden, um Ausdrücke wie $z_3/(z_1+z_2)$, e^{z1z2}, $|z_1 + z_2| + |z_2 - z_3|$ etc., zu berechnen, wobei z_1, z_2 und z_3 komplexe Zahlen der Form x+iy sind.

Für den wiederholten Gebrauch dieser Operationen, kann der Benutzer die einzelnen Programme ausgewählten Tasten zuweisen und eine entsprechende Maske selbst herstellen. Eine vernünftige Neuzuweisung könnte etwa sein:

[ASN] SINZ [SIN]
[ASN] LNZ [LN]
[ASN] C+ [+]
[ASN] C– [–]
[ASN] CINV [1/x]

Das Logik-System für diese Programme kann man sich am besten als eine Art umgekehrte Polnische Notation mit einem aus zwei komplexen Zahlen bestehenden Stack vorstellen. Das untere und das obere Register des komplexen Stacks sei als ξ bzw. τ bezeichnet. Diese entsprechen somit den X- und T-Registern des Vier-Register Stacks des Rechners*. Eine komplexe Zahl z_1 wird durch die Tasten y_1 [ENTER↑] x_1 ins ξ-Register transportiert. Durch die Eingabe einer zweiten komplexen Zahl z_2 ([ENTER↑] y_2 [ENTER↑] x_2) wird z_1 ins Register τ geschoben und z_2 im Register ξ abgelegt. Der vorherige Inhalt von τ ist verloren.

Funktionen bedienen sich des ξ-Registers, deren Ergebnis im ξ-Register steht (mit Ausnahme von $|z|$, wobei eine reelle Zahl erscheint). Arithmetische Operationen beziehen sich auf das ξ- und τ-Register; das Ergebnis wird in ξ abgelegt.

Das Programm des Anwender-Moduls belegt die Speicher 00-04.

Gleichungen:

Es sei

$$z_k = x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}, k = 1, 2$$

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

* Jedes Register des Stacks muß zwei Zahlen enthalten: den reellen und den imaginären Teil des komplexen Inhalts. Somit werden zwei Stack-Register für eine komplexe Zahl gebraucht. Komplexe Stack-Register werden (sprachlich) wie ein einziges Register behandelt.

Die Lösung sei für jeden Fall von der Form u + iv.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1/z = \frac{x}{r^2} - i\frac{y}{r^2}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360k}{n}\right)}, k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(es werden alle Lösungen ausgegeben, k=0, 1, ... n-1)

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),\ \text{mit y in Rad}$$

$$\ln z = \ln r + i\theta,\quad \text{mit}\quad z \neq 0$$

$$a^z = e^{z\ln a},\quad \text{mit}\quad a > 0 \text{ und reell}$$

$$\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a},\quad \text{mit}\quad a > 0 \text{ reell und, } z \neq 0$$

$$z^w = e^{w\ln z},\quad \text{mit}\quad z \neq 0,\ w \text{ is komplex}$$

$$z^{1/w} = e^{\ln z/w},\quad \text{mit}\quad z \neq 0, \text{ und komplex } w \neq 0$$

$$\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y,\ \text{Winkel in Rad}$$

$$\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y,\ \text{Winkel in Rad}$$

$$\tan z = \frac{\sin 2x + \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y},\ \text{Winkel in Rad}$$

Umfang: 005

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	ARITHMETIK			
	erste komplexe Zahl eingeben			
	$(x_1 + iy_1)$	y_1	ENTER↑	
		x_1	ENTER↑	
2.	zweite komplexe Zahl eingeben			
	$(x_2 + iy_2)$	y_2	ENTER↑	
		x_2		
3.	auswählen einer der vier Operationen:			
	● Addieren (+)		XEQ C+	U=
			R/S	V=
	● Subtrahieren (-)		XEQ C-	U=
			R/S	V=
	● Multiplizieren (x)		XEQ Cx	U=
			R/S	V=
	● Dividieren (÷)		XEQ C÷	U=
			R/S	V=
4.	das Ergebnis der Operation ist nun im Stack; weiter mit Schritt 5 für Funktionen oder Schritt 2 mit anderen arithmetischen Operationen			
	FUNKTIONEN			
5.	Auswahl einer der folgenden Funktionen:			
	● Absolutwert (z)	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ MAGZ	R=
	● Reziprokwert (1/z)	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ CINV	U=
			R/S	V=
	● ganzzahlige Potenz von z	y_1	ENTER↑	
	(z^n)	x_1	ENTER↑	
		n	XEQ Z ↑ N	U=
			R/S	V=
	● n-te Wurzel von z $(z^{1/n})$	y_1	ENTER↑	
	Beachte: es gibt n Lösungen	x_1	ENTER↑	
	der Form u+iv	n	XEQ Z ↑ 1/N	U=
			R/S	V=
	● e^z	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ e ↑ Z	U=
			R/S	V=
	● natürlicher Logarithmus von	y_1	ENTER↑	
	z (lnz)	x_1	XEQ LNZ	U=
			R/S	V=
	● z-te Potenz einer reellen			
	Zahl a (a^z)	y_1	ENTER↑	
		x_1	ENTER↑	
		a	XEQ a ↑ Z	U=
			R/S	V=

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
	● Logarithmus von z zur Basis	y_1	ENTER↑	
	a ($\log_a{}^z$)	x_1	ENTER↑	
		a	XEQ LOGZ	U=
			R/S	V=
	● Komplexe Potenz von z	y_2	ENTER↑	
	$w=x_2+iy_2$ (z^w)	x_2	ENTER↑	
		y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ Z↑W	U=
			R/S	V=
	● w-te komplexe Wurzel von z	y_2	ENTER↑	
	($z^{1/w}$)	x_2	ENTER↑	
		y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ Z↑1/W	U=
			R/S	V=
	● sin(z)	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ SINZ	U=
			R/S	V=
	● cos(z)	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ COSZ	U=
			R/S	V=
	● tan(z)	y_1	ENTER↑	
		x_1	XEQ TANZ	U=
			R/S	V=
6.	weiter mit Schritt 2 für arithmetische oder Schritt 5 für andere Operationen			

Beispiel 1:

Es soll der Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2 + z_3},$$

mit $z_1=23+13i$, $z_2=-2+i$ und $z_3=4-3i$ berechnet werden.

(Vorschlag: da nur jeweils zwei Zahlen vom Programm bearbeitet werden können, sollte die Gleichung umformuliert werden zu

$$z_1 \times \left[1/(z_2 + z_3)\right].)$$

Tasten:	Anzeige:	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 005		
1 [ENTER↑] 2 [CHS] [ENTER↑]		
3 [CHS] [ENTER↑] 4		
[XEQ] [ALPHA] C+ [ALPHA]	U=2.0000	real $(z_2 + z_3)$
[R/S]	V=-2.0000	imag $(z_2 + z_3)$
[XEQ] [ALPHA] CINV [ALPHA]	U=0.2500	$1/(z_2 + z_3)$
[R/S]	V=0.2500	
13 [ENTER↑] 23		
[XEQ] [ALPHA] C× [ALPHA]	U=2.500 Real	$(z_1/(z_2 + z_3))$
[R/S]	V=9.0000 Im	

Beispiel 2:

Gesucht sind die drei dritten Wurzeln von 8.

Tasten:	Anzeige:
0 [ENTER↑] 8 [ENTER↑] 3	
[XEQ] [ALPHA] Z↑1/N [ALPHA]	U=2.0000
[R/S]	V=0.0000
[R/S]	U=-1.0000
[R/S]	V=1.7321
[R/S]	U=-1.0000
[R/S]	V=-1.7321

Beispiel 3:

Berechne $e^{z^{-2}}$, mit z=(1+i):

Tasten:	Anzeige:	
1 [ENTER↑] 1 [ENTER↑] 2		
[XEQ] [ALPHA] Z↑N [ALPHA]	U=0.0000	(z^2)
[R/S]	V=2.0000	
[XEQ] [ALPHA] CINV [ALPHA]	U=0.0000	(z^{-2})
[R/S]	V=-0.5000	
[XEQ] [ALPHA] e↑Z [ALPHA]	U=0.8776	$(e^{z^{-2}})$
[R/S]	V=-0.4794	

Beispiel 4:

Berechne sin(2 + 3i):

Tasten:	**Anzeige:**
3 [ENTER↑] 2	
[XEQ] [ALPHA] SINZ [ALPHA]	***U=9.1545***
[R/S]	***V=-4.1689***

HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN

Dieses Programm berechnet die hyperbolischen Funktionen und deren Inverse. Falls die einzelnen Programme bestimmten Tasten des Rechners zugeordnet werden sollen, um sie mit einer entsprechenden Maske zu kennzeichnen, könnte eine Umdefinition von Tasten etwa so aussehen:

$\boxed{\text{ASN}}$ SINH $\boxed{\text{SIN}}$
$\boxed{\text{ASN}}$ COSH $\boxed{\text{COS}}$
$\boxed{\text{ASN}}$ TANH $\boxed{\text{TAN}}$
$\boxed{\text{ASN}}$ ASINH ■ $\boxed{\text{SIN}}$
$\boxed{\text{ASN}}$ ACOSH ■ $\boxed{\text{COS}}$
$\boxed{\text{ASN}}$ ATANH ■ $\boxed{\text{TAN}}$

Gleichungen:

Hyperbolische Funktionen:

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left[e^x - 1 + \frac{e^x - 1}{e^x}\right]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Inverse hyperbolische Funktionen:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left[x + (x^2 + 1)^{1/2}\right]$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left[x + (x^2 - 1)^{1/2}\right] \qquad x \geqslant 1$$

$$\tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] \qquad x^2 < 1$$

Bemerkungen:

- Das Programm des Moduls belegt das Register 00.
- Das Drucker-Einschalt-Flag (Flag 21) wird vom Modul-Programm nicht gesetzt.

				Umfang: 001
Nummer	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	Für hyperbolische Funktionen weiter mit Schritt 2; für inverse hyperbolische Funktionen weiter mit Schritt 3.			
	HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN			
2.	Argument eingeben und berechnen			
	● Sinus hyperbolicus	x	XEQ SINH	sinh x
	● Kosinus hyperbolicus	x	XEQ COSH	cosh x
	● Tangens hyperbolicus	x	XEQ TANH	tanh x
	INVERSE HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN			
3.	Argument eingeben und berechnen			
	● inverser Sinus hyperbolicus	x	XEQ ASINH	$\sinh^{-1} x$
	● inverser Kosinus hyperbol.	x	XEQ ACOSH	$\cosh^{-1} x$
	● inverser Tangens hyperbol.	x	XEQ ATANH	$\tanh^{-1} x$

Beispiel 1:
Berechne die folgenden hyperbolischen Funktionen:

sinh2.5, cosh3.2, tanh1.9

Tasten:	**Anzeige:**	
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 001		
2.5 XEQ ALPHA SINH ALPHA	***6.0502***	(sinh 2.5)
3.2 XEQ ALPHA COSH ALPHA	***12.2866***	(cosh 3.2)
1.9 XEQ ALPHA TANH ALPHA	***0.9562***	(tanh 1.9)

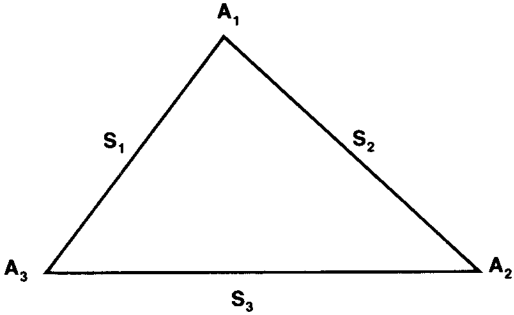
Beispiel 2:
Berechne die folgenden inversen hyperbolischen Funktionen:

$\sinh^{-1} 2.4$, $\cosh^{-1} 90$, $\tanh^{-1} -0.65$

Tasten:	**Anzeige:**	
2.4 XEQ ALPHA ASINH ALPHA	***1.6094***	($\sinh^{-1} 2.4$)
90 XEQ ALPHA ACOSH ALPHA	***5.1929***	($\cosh^{-1} 90$)
.65 CHS		
XEQ ALPHA ATANH ALPHA	***-0.7753***	($\tanh^{-1} -0.65$)

DREIECKSBESTIMMUNGEN

Diese Programme können zur Bestimmung von Fläche, Seitenlänge (S_1, S_2, S_3) und Winkel (A_1, A_2, A_3) ebener Dreiecke eingesetzt werden.



Es werden einfach die drei bekannten Werte eingegeben und das entsprechende Programm gewählt. Der Rechner gibt Fläche, Seitenlängen und Winkel aus. Die Reihenfolge der Ausgabe hängt von der Reihenfolge der Eingabe ab. Werden die Eingabewerte nach dem Uhrzeigersinn um das Dreieck gewählt, so werden die errechneten Werte auch im Uhrzeigersinn ausgegeben. Die Reihenfolge ist:

erste eingegebene Seite	(S_1)
anliegender Winkel	(A_1)
anliegende Seite	(S_2)
anliegender Winkel	(A_2)
anliegende Seite	(S_3)
anliegender Winkel	(A_3)
Fläche	

Gleichungen:

Alle Dreiecksseiten (S_1, S_2, S_3) bekannt:

$$A_3 = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{P(P - S_2)}{S_1 S_3}}$$

wobei $P = (S_1 + S_2 + S_3)/2$

$$A_2 = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{P(P - S_1)}{S_2 S_3}}$$

$$A_1 = \cos^{-1} (-\cos(A_3 + A_2))$$

A_3, S_1 und A_1 bekannt: Zwei Winkel und die eingeschlossene Seite.

$$A_2 = \cos^{-1}(-\cos(A_3 + A_1))$$

$$S_2 = S_1 \frac{\sin A_3}{\sin A_2}$$

$$S_3 = S_1 \cos A_3 + S_2 \cos A_2$$

S_1, A_1 und A_2 bekannt: Eine Seite und die beiden folgenden Winkel.

$$A_3 = \cos^{-1}(-\cos(A_1 + A_2))$$

Damit ist das Problem auf die A_3, S_1, A_1 Lösung reduziert.
S_1, A_1 und S_2 bekannt: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

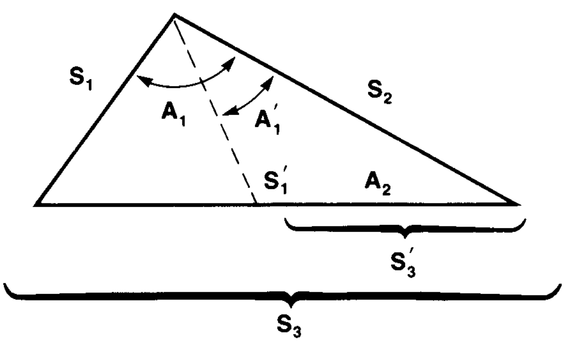
$$S_3 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2\, S_1 S_2 \cos A_1}$$

Damit ist das Problem auf die S_1, S_2, S_3 Lösung reduziert.
S_1, S_2 und A_2 bekannt: Zwei Seiten und der anliegende Winkel.

$$A_3 = \sin^{-1}\left[\frac{S_2}{S_1} \sin A_2\right]^*$$

$$A_1 = \cos^{-1}\left[-\cos(A_2 + A_3)\right]$$

Damit ist das Problem auf die A_3, S_1, A_1 Lösung reduziert.



Area = 1/2 S_1 S_3 sin A_3

*Beachte: Es existieren zwei Lösungen für den Fall, daß S_2 größer als S_1 und A_3 ungleich 90° ist. Beide möglichen Lösungen werden bestimmt.

Anmerkungen:

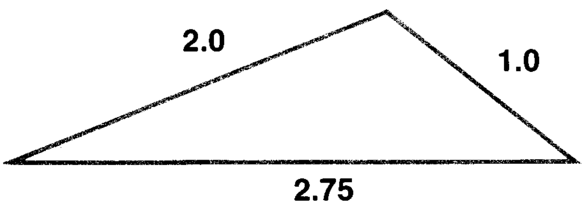
- Das Programm belegt die Register R_{00}-R_{07}.
- Winkelangaben müssen dem Winkelmodus des Rechners entsprechen.
- Es ist zu beachten, daß das Dreieck in der Programmbeschreibung nicht der Standardnotation für Dreiecke entspricht, z. B. liegt A_1 der Seite S_1 **nicht** gegenüber.
- Winkel müssen als Dezimalzahl angegeben werden. Die [HR] Konversion kann dazu verwendet werden, Grad, Minuten und Sekunden in dezimale Winkelangaben umzuformen.
- Die numerische Genauigkeit kann für sehr kleine Winkel ungenügend sein.

				Umfang: 008
Nummer	**Anweisung**	**Eingabe**	**Funktion**	**Anzeige**
1.	entsprechenden Winkelmodus einstellen			
2.	anwendbaren Fall der untenstehenden Liste wählen und die angezeigten Werte eingeben:			
	alle Seiten bekannt		[XEQ] SSS	S1=?
		S_1	[R/S]	S2=?
		S_2	[R/S]	S3=?
		S_3	[R/S]	S1=
	Zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt		[XEQ] ASA	A3=?
		A_3	[R/S]	S1=?
		S_1	[R/S]	A1=?
		A_1	[R/S]	S1=
	Zwei Winkel und anliegende Seite bekannt		[XEQ] SAA	S1=?
		S_1	[R/S]	A1=?
		A_1	[R/S]	A2=?
		A_2	[R/S]	S1=
	Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt		[XEQ] SAS	S1=?
		S_1	[R/S]	A1=?
		A_1	[R/S]	S2=?
		S_2	[R/S]	S1=
	Zwei Seiten und der anliegende Winkel bekannt		[XEQ] SSA	S1=?
		S_1	[R/S]	S2=?
		S_2	[R/S]	A2=?
		A_2	[R/S]	S1=

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
3.	Nach Schritt 2 können die Werte für Seiten und Winkel durch sukzessives Drücken von [R/S] angezeigt werden. Die letzte Angabe ist die Dreiecksfläche. Für den letzten Fall (SSA) gibt es zwei mögliche Lösungen, beide werden ausgegeben		[R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S] [R/S]	A1= S2= A2= S3= A3= AREA=

Beispiel 1:

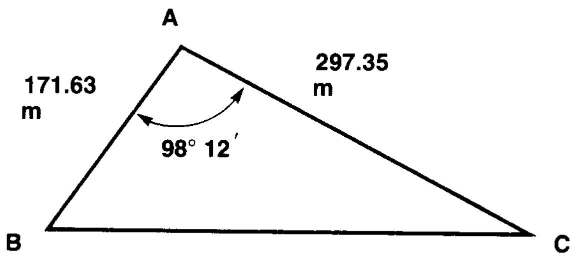
Gesucht sind die Winkel (in Grad) und die Fläche des folgenden Dreiecks:



Tasten:	Anzeige:
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 008	
[XEQ] [ALPHA] DEG [ALPHA]	
[XEQ] [ALPHA] SSS [ALPHA]	***S1=?***
2 [R/S]	***S2=?***
1 [R/S]	***S3=?***
2.75 [R/S]	***S1=2.0000***
[R/S]	***A1=129.8384***
[R/S]	***S2=1.0000***
[R/S]	***A2=33.9479***
[R/S]	***S3=2.7500***
[R/S]	***A3=16.2136***
[R/S]	***AREA=0.7679***

Beispiel 2:

Ein Landvermesser muß die Fläche und die Ausdehnung einer dreieckigen Parzelle bestimmen. Vom Punkt A werden die Abstände zu B und C mit einem elektronischen Längenmeßgerät bestimmt. Die Winkel zwischen AB und AC werden ebenfalls gemessen. Gesucht sind Fläche und die restlichen Seitenlängen.



Dies ist ein Seite-Winkel-Seite Problem mit:

S_1=171.63, A_1=98° 12' und S_2=297.35

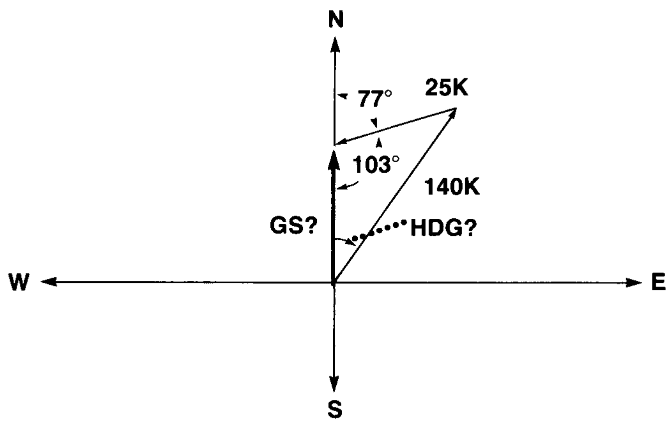
Tastenfolge:	**Anzeige:**
[XEQ] [ALPHA] SAS [ALPHA]	***S1=?***
171.63 [R/S]	***A1=?***
98.12 [XEQ] [ALPHA] HR [ALPHA]	
[R/S]	***S2=?***
297.35 [R/S]	***S1=171.6300***
[R/S]	***A1=98.2000***
[R/S]	***S2=297.3500***
[R/S]	***A2=27.8270***
[R/S]	***S3=363.9118***
[R/S]	***A3=53.9730***
[R/S]	***AREA=25,256.2094***

Beispiel 3:

Ein Pilot möchte genau nördlich fliegen. Die Windangabe ist 25 Knoten und 077°. Da Windrichtungen diejenige Richtung sind, aus der der Wind kommt, wird der Windwinkel in 077° + 180° oder 257° umgerechnet. Die wahre Eigengeschwindigkeit des Flugzeug ist 140 Knoten. Welcher Steuerkurs muß - zur Kompensation der Abdrift durch den Wind - geflogen werden? Wie hoch ist die Geschwindigkeit über Grund?

Steuerkurs: HDG (HeaDinG) wahre Eigengeschwindigkeit: TAS (True Air Speed)

Geschwindigkeit über Grund: GS (Ground Speed) Windgeschwindigkeit: WV

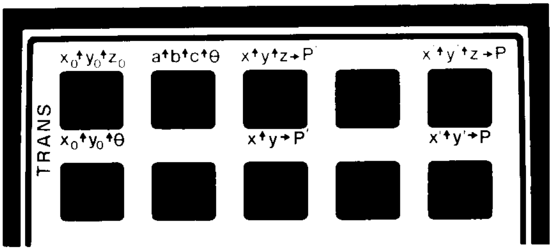


Zieht man die Windrichtung von 180° ab (man erhält dabei einen Winkel von 103°), reduziert sich das Problem auf eine S_1, S_2, A_2 Lösung.

Tastenfolge:	**Anzeige:**	
[XEQ] [ALPHA] SSA [ALPHA]	*S1=?*	
140 [R/S]	*S2=?*	
25 [R/S]	*A2=?*	
103 [R/S]	*S1=140.0000*	(TAS)
[R/S]	*A1=66.9798*	
[R/S]	*S2=25.0000*	(Wind velocity)
[R/S]	*A2=103.0000*	
[R/S]	*S3=132.2407*	(GS)
[R/S]	*A3=10.0202*	(HDG)
[R/S]	*AREA=1,610.6428*	

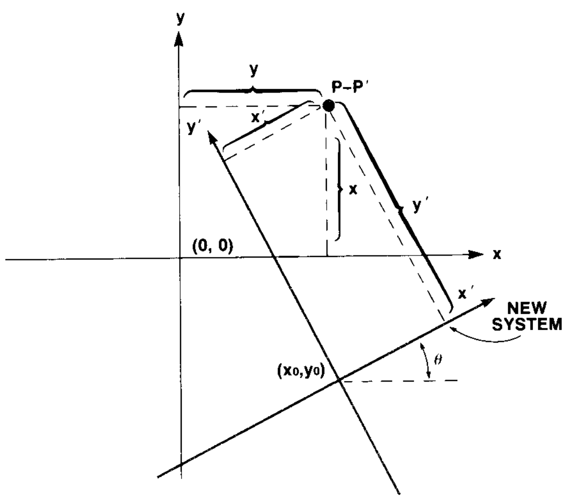
Somit muß der Pilot einen Steuerkurs von 10.02° (NNO) fliegen. Seine Geschwindigkeit über Grund beträgt 132.24 Knoten.

KOORDINATENTRANSFORMATION



Dieses Programm bietet 2- und 3-dimensionale Koordinaten-Translation und/oder Rotation.

Für den 2-dimensionalen Fall sind die Koordinaten des Ursprungs des achsenverschobenen System und der Rotationswinkel relativ zum Ausgangssystem einzugeben, danach sind die neuen Achsen zu spezifizieren. (Ursprungskoordinaten: (x_0,y_0), Rotationswinkel: θ). Diese Größen werden mit der Taste [A] eingegeben. Danach können durch Drücken von [C] Punkte des ursprünglichen Systems mit (x,y) eingegeben und in das neue achsenverschobene und gedrehte System mit (x',y') abgebildet werden. Punkte des neuen (x',y')-Systems können durch Drükken von [E] in das ursprüngliche (x,y)-System abgebildet werden.



Der 3-dimensionale Fall ist dem 2-dimensionalen analog. Der einzige wichtige Unterschied betrifft die Angaben zur Drehung. Die Rotationsachse geht durch den verschobenen Ursprung (x_0, y_0, z_0) und ist parallel zu einem beliebigen Ortsvektor (ai, bj, ck). Das Vorzeichen des Rotationswinkels (Θ) wird nach der Rechte-Hand-Regel und der Richtung des Rotationsvektors bestimmt. Beispielsweise in dem Spezialfall der 2-dimensionalen Rotation (Drehung nur in der (x,y)-Ebene) kann dies unter Verwendung eines Ortsvektors von (0, 0, 1) und einem positiven Drehwinkel - für Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn- bewerkstelligt werden. Die Koordinaten des verschobenen Ursprungs (x_0, y_0, z_0) werden mit ■ [A] eingegeben. Der Ortsvektor und der Drehwinkel werden mit ■ [B] eingegeben. Umwandlungen von ursprünglichen Systemen (x,y,z) in das neue System mit (x',y',z')werden mit ■ [C] initiiert, während der umgekehrte Vorgang mit ■ [E] erreicht wird.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

wobei:

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ba(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ca(1-\cos\theta)-b\sin\theta & cb(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

Zweidimensionale Transformation werden als Spezialfall der Dreidimensionalen Transformation behandelt; dabei wird (a,b,c) auf (0,0,1) gesetzt.

Anmerkungen:

- Für reine Translation ist $\theta = 0.0$ zu setzen.
- für reine Rotation sind x_0, y_0 und z_0 gleich Null zu setzen.
- das Programm belegt die Register 00-25

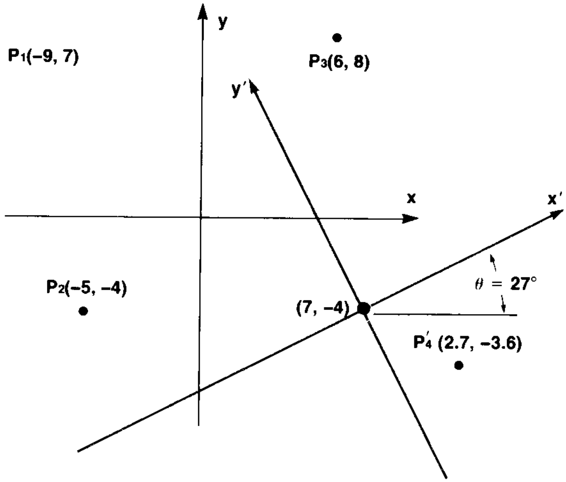
Umfang: 026

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren und Maske auflegen.		[XEQ] TRANS	0.0000
2.	für den 2-dimensionalen Fall: weiter mit Schritt 3 für den 3-dimensionalen Fall: weiter mit Schritt 6			

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
3.	Ursprung und Rotationswinkel des neuen Koordinatensystems eingeben	x_0	ENTER↑	
		y_0	ENTER↑	
		θ	1.0000	
			A	
4.	Transformieren der Koordinaten des alten Systems in das neue	x	ENTER↑	
		y	C	x'
			R/S	y'
	oder			
	aus dem neuen System in das alte	x'	ENTER↑	
		y'	E	x
			R/S	y
5.	für ein weiteres Koordinatenpaar weiter mit Schritt 4. Bei einem neuen Koordinatensystem weiter mit Schritt 3.			
6.	Ursprung des verschobenen Koordinatensystems eingeben	x_0	ENTER↑	
		y_0	ENTER↑	
		z_0	■ A	x_0
	und			
	Rotationsvektor und -Winkel eingeben	a	ENTER↑	
		b	ENTER↑	
		c	ENTER↑	
		θ	■ B	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
7.	Koordinten des ursprünglichen Systems in das neue System umwandeln.	x	ENTER↑	
		y	ENTER↑	
		z	■ C	x'
			R/S	y'
			R/S	z'
	oder			
	aus dem translozierten und rotierten System in das ursprüngliche	x'	ENTER↑	
		y'	ENTER↑	
		z'	■ E	x
			R/S	y
			R/S	z
8.	für ein neues Koordinatenpaar weiter mit Schritt 7. für eine neue 3-dimensionale Transformation: weiter mit Schritt 6 (sowohl (x_0, y_0, z_0) als auch (a,b,c,θ) können unabhängig voneinander geändert werden.			

Beispiel 1:

Gegeben seien die beiden untenstehenden Koordinatensysteme (x,y) und (x', y'):



Die Punkte P_1, P_2 und P_3 sollen in die äquivalenten Koordinaten des (x',y')-Systems überführt werden. Außerdem soll P_4 in das (x,y)-System überführt werden. (Es werden Winkelgrade verwendet.)

Tastenfolge:	**Anzeige:**	
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 025		
[XEQ] [ALPHA] TRANS [ALPHA]	*0.0000*	
7 [ENTER↑] 4 [CHS] [ENTER↑]		
27 [A]	*1.0000*	
9 [CHS] [ENTER↑] 7 [C]	*-9.2622*	(x_1')
[R/S]	*17.0649*	(y_1')
5 [CHS] [ENTER↑] 4 [CHS] [C]	*-10.6921*	(x_2')
[R/S]	*5.4479*	(y_2')
6 [ENTER↑] 8 [C]	*4.5569*	(x_3')
[R/S]	*11.1461*	(y_3')
2.7 [ENTER↑] 3.6 [CHS] [E]	*11.0401*	(x_4)
[R/S]	*-5.9818*	(y_4)

Beispiel 2:

Ein 3-dimensionales Koordinatensystem wird in den Punkt (2.45, 4.00, 4.25) verschoben. Danach wird eine Drehung um 62.5° um die Achse (0, -1, -1) ausgeführt. Im ursprünglichen System hat ein bestimmter Punkt die Koordinaten (3.9, 2.1, 7.0). Was sind die Koordinaten dieses Punktes im neuen System?

Tastenfolge:	Anzeige:	
[XEQ] [ALPHA] TRANS [ALPHA]		
2.45 [ENTER↑] 4 [ENTER↑]		
4.25 ■ [A]	*2.4500*	
0 [ENTER↑] 1 [CHS] [ENTER↑]		
1 [CHS] [ENTER↑] 62.5 ■ [B]	*1.4142*	
3.9 [ENTER↑] 2.1 [ENTER↑]		
7 ■ [C]	*3.5861*	(x′)
[R/S]	*0.2609*	(y′)
[R/S]	*0.5891*	(z′)

In dem neuen (verschobenen und gedrehten) Achsensystem hat der Punkt die Koordinaten (1, 1, 1). Was waren seine Koordinaten im ursprünglichen System?

Tastenfolge:	Anzeige:	
1 [ENTER↑] 1 [ENTER↑]		
1 ■ [E]	*2.9117*	(x)
[R/S]	*4.3728*	(y)
[R/S]	*5.8772*	(z)

PROGRAMM	REGISTERZAHL FÜR COPY	DATEN REGISTER	FLAGS	ANZEIGE-FORMAT	WINKEL-MODUS
Matrixalgebra	138	(vgl. Register-belegungsplan)	02-10 21-22 25 29		
Lösungen für f(x)	43	00-06	00 21-22		
Nullstellen und Funktions-werte von Polynomen	84	00-22	00 02-03 21	FIX 4	
Numerische Integration	27	00-07	21 27		
Differentialgleichungen	35	00-07	01 21		
Fourier-Analyse	50	00-26	01-02 21 29	FIX 4	
Komplexe Operationen	59	00-04	21		RAD/DEG
Hyperbolische Funktionen	17	00			
Dreiecksberechnungen	46	00-07	21		
Koordinatentransformation	50	00-23	00-02 21 27		

SPEICHERBELEGUNGSPLAN FÜR MATRIZEN

Dimension	Anzahl Speichererweiterungs-Module (RAM) (M)	Anzahl Register (R)	total	Anfangs- und Endadresse der Matrix	der Pivots	der Spalten	Register
N	$\text{INT}\left(\frac{N^2+2N+15}{64}\right)$	$N^2+2N+15$	00 to $N^2+2N+14$	15 to N^2+14	N^2+15 to N^2+N+14	N^2+N+15 to $N^2+2N+14$	13 to N^2+N+14
1	0	18	00- 17	15- 15	16- 16	17- 17	13- 16
2	0	23	00- 22	15- 18	19- 20	21- 22	13- 20
3	0	30	00- 29	15- 23	24- 26	27- 29	13- 26
4	0	39	00- 38	15- 30	31- 34	35- 38	13- 34
5	0	50	00- 49	15- 39	40- 44	45- 49	13- 44
6	0	63	00- 62	15- 50	51- 56	57- 62	13- 56
7	1	78	00- 77	15- 63	64- 70	71- 77	13- 70
8	1	95	00- 94	15- 78	79- 86	87- 94	13- 86
9	1	114	00-113	15- 95	96-104	105-113	13-104
10	2	135	00-134	15-114	115-124	125-134	13-124
11	2	158	00-157	15-135	136-146	147-157	13-146
12	2	183	00-182	15-158	159-170	171-182	13-170
13	3	210	00-209	15-183	184-196	197-209	
14	3	239	00-238	15-210	211-224	225-238	

*Die Matrix ist zeilenweise gespeichert. Jedes Element a_{ij} kann unter Verwendung der Formel: Registeradresse = $N(i-1)+j+14$ erreicht werden.

Angaben zur Verwendung einzelner Anwender-Modul-Programme als Unterprogramme.

UNTER-PROGRAMM	MARKE	ANFANGSADRESSE	FLAG STATUS	ENDADRESSE	ANMERKUNGEN
Matrix Pivotieren	PVT	$15 - N^2 + 14$ *) R_{14} Dimension	SF 04 CF 06 CF 07 CF 08 CF 09 CF 10 SF 21	$00 - N^2 + 2N + 14$ *)	Erlaubt das Überspringen der Fragen zur Matrix am Anfang des Programms.
Simultanes Gleichungs-system	SIMEQ	$15 - N^2 + 14$ und $N^2 + N + 15 -$ $N^2 + 2N + 14$ *) R_{14} Dimension	SF 04 SF 05 CF 06 CF 07 CF 08 CF 09 CF 10 SF 21	$00 - N^2 + 2N + 14$ *)	Überspringt die Fragen am Anfang. Der Spaltenvektor muß bereits gespeichert sein.
Lösungen für f(x) im Interval	SOL	R_{01} Guess 1 R_{02} Guess 2 R_{06} Function Name	SF 21	R_{00}-R_{00} belegt	Beachte: Funktion muß eingegeben werden. Flag 00 wird im Programm verwendet.
Nullstellen von Polynomen	ROOTS	R_{00} a_0 R_{01} a_1 R_{02} a_2 R_{03} a_3 R_{04} a_4 R_{22} Degree	SF 21 SF 00	R_{00}-R_{22} belegt	Bestimmt alle Lösungen mit reellen Koeffizienten; Koeffizient des höchsten Grades muß 1 sein.

*) vgl. Speicherbelegungsplan für Matrizen S. 58.

HEWLETT
PACKARD

00041-90035 German KWP 11.79-Pe. Printed in SGP