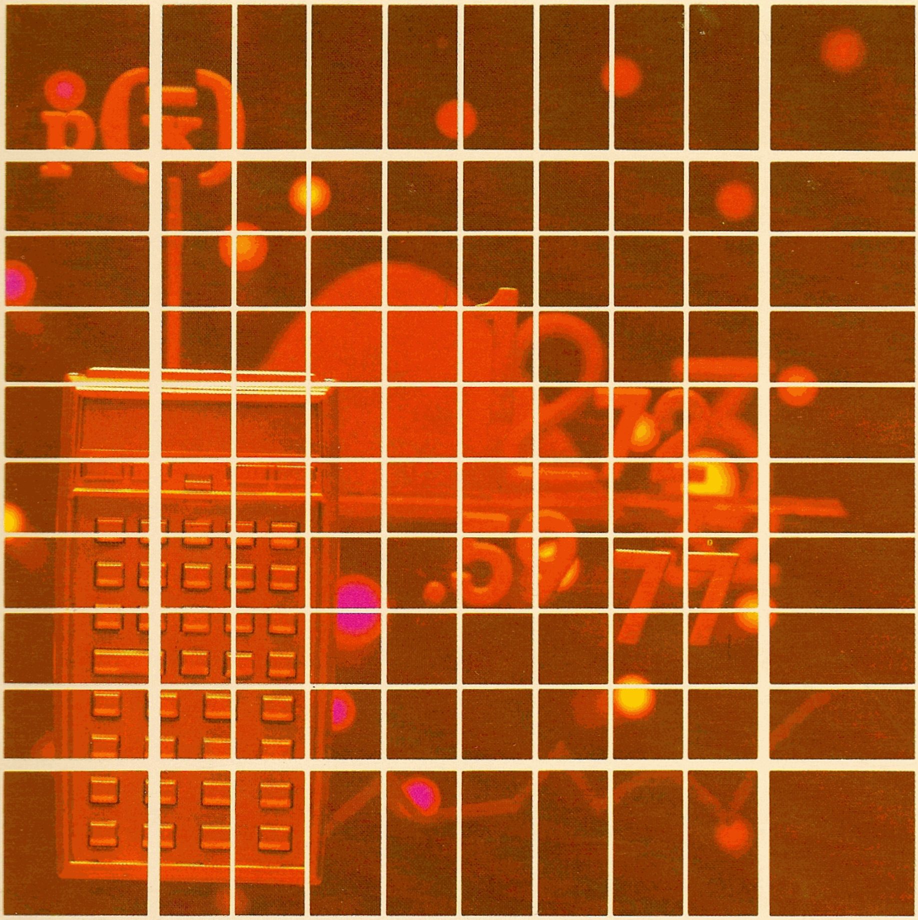
HEWLETT-PACKARD

HP-41C

BIBLIOTHÈQUE STATISTIQUES



NOTE

Les programmes de ce manuel sont fournis sans aucune garantie. La Société Hewlett-Packard n'assume donc aucune responsabilité quant aux conséquences directes ou non de l'utilisation de ces programmes.

Référence du manuel : 00041-90032 Imprimé : Décembre 1979

HEWLETT PACKARD

HEWLETT-PACKARD ÉCOUTE

Pour vous fournir un meilleur support, notre groupe d'ingénieurs d'application a besoin de votre aide. Toutes les informations que vous pouvez nous donner nous permettront d'obtenir des logiciels d'une plus grande qualité et d'améliorer les livrets d'applications existants pour votre calculateur. Vos réponses nous seront extrêmement utiles.

1. Nom de la bibliothèque
2. Quelle est l'importance de l'existence de cette bibliothèque dans votre choix d'un calculateur Hewlett-Packard ?
   Prépondérant Important Sans importance.
3. Quel est le domaine d'application principal pour lequel vous avez acquis cette bibliothèque ?

---

4. Dans la liste suivante, notez le degré d'utilité des programmes.

Numéro du programme	Essentiel	Important mais non requis	Non fréquent	Jamais utilisé
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Numéro du programme	Essentiel	Important mais non requis	Non fréquent	Jamais utilisé
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

5. Avez-vous acheté une imprimante ? OUI ☐ NON ☐. Si oui, le format d'impression de cette bibliothèque est-il pratique ? OUI ☐ NON ☐
6. Quel programme ajouteriez-vous à cette bibliothèque ?

---

7. Quelles bibliothèques supplémentaires aimeriez-vous voir développées ?

Nous vous remercions de votre coopération

Nom Responsabilité

Société

Adresse

Ville

Code postal Téléphone

A retourner à :

Hewlett-Packard S.A.
7, rue du Bois-du-Lan
1217 Meyrin 2 — Genève, SUISSE
Tél. : (022) 82.70.00.

COMMENTAIRES

Hewlett-Packard SA
PERSONAL CALCULATOR DIVISION
P.O. Box
CH-1217 Meyrin 2 - Geneva
Suisse

INTRODUCTION

Nous allons aborder maintenant un domaine qui, il y a seulement dix ans, était ouvert uniquement à de grands systèmes de calcul coûtant fort cher. Aujourd'hui, le HP-41C met la programmation à la portée de chacun. Par la simple connexion d'un module d'application, vous pouvez adapter votre calculateur à vos besoins.

Chaque programme de cette bibliothèque est présent dans le module d'application. Le manuel décrit le programme, donne les équations de base, un tableau d'utilisation ainsi qu'un ou plusieurs problèmes et leurs solutions. Les listages annotés des programmes sont donnés en fin de manuel ; leur étude approfondie vous permettra sans doute de découvrir de nouvelles techniques de programmation.

Avant de connecter votre module d'application, vous devez lire la partie « Connexion d'un module » pour ne pas risquer de le détériorer. Les deux parties suivantes vous aideront à utiliser correctement n'importe quel programme.

Il est préférable d'exécuter une fois ou deux un nouveau programme avec des données connues pour vous assurer que vous en connaissez parfaitement la procédure. Après cela, les messages affichés et les grilles de personnalisation du clavier doivent suffire à vous guider dans le programme. Un aide-mémoire, portant une brève description des procédures d'utilisation de chaque programme est joint à la bibliothèque.

Cette bibliothèque doit vous aider grandement dans la résolution de nombreux problèmes et nous aimerions connaître vos critiques la concernant. Pour cela nous avons joint un questionnaire à la fin de ce manuel. Vos commentaires sont une des importantes sources d'informations qui nous permettent d'améliorer toujours plus les programmes que nous vous proposons.

Table des matières

Statistiques sur test

Fonctions de distribution

Connexion et retrait d'une extension

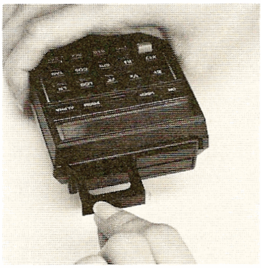
Vous pouvez connecter quatre extensions (modules, imprimantes, etc.) dans les logements d'entrée/sortie du HP-41C. Pour lister les noms des fonctions apportées par les différentes extensions connectées, il suffit d'appuyer sur ■ CATALOG 2.

> **ATTENTION**
>
> **Veillez à toujours éteindre le HP-41C avant de connecter ou de retirer une extension. Le non respect de ce conseil peut entraîner une détérioration du calculateur et de l'extension.**

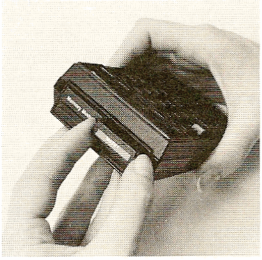
Procédure de connexion d'un module (identique pour un périphérique) :

1) Éteignez le HP-41C (et éventuellement le périphérique).

2) Enlevez le capuchon du logement que vous voulez utiliser et conservez-le car vous devez le remettre sur le logement, si aucune extension n'y est connectée.



3) Introduisez le module ou le connecteur, étiquette sur le dessous, après le dernier module mémoire ; voir ci-contre et au dos du calculateur les numéros des logements.



4) Si vous voulez connecter d'autres extensions, vous pouvez le faire dans n'importe laquelle des portes libres après le dernier module mémoire. Par exemple si un module mémoire est en 1, vous pouvez connecter vos extensions en 2, 3, ou 4. Il ne faut jamais connecter une extension dans un logement de numéro inférieur à celui d'un module mémoire.

   Veillez à ce que tous les logements inutilisés soient protégés par un capuchon.

5) Mettez le calculateur sous tension et suivez les instructions de ce manuel pour les fonctions désirées.

Retrait d'une extension :

1) Éteignez le calculateur (et éventuellement le périphérique).
2) Tirez sur le module ou sur le connecteur.

3) Replacez un capuchon sur le logement ainsi libéré.

Utilisation simultanée des modules mémoire et des modules d'application

Chaque fois que vous désirez connecter d'autres extensions (le lecteur de cartes HP-82104A ou l'imprimante HP-82143A), les modules mémoire doivent être placés dans les logements de plus bas numéros, de par la conception même du PH-41C.

Ainsi quand vous utilisez les modules mémoire en même temps que les modules d'application, vous devez toujours enficher les modules mémoire dans les logements de plus bas numéros et le module d'application dans n'importe quel logement qui suit. Dans ce cas, le HP-41C vous permet de laisser des logements vides. Vous pouvez, par exemple, enficher un module mémoire dans le logement 1 et un module d'application dans le logement 4, les logements 2 et 3 restant vides.

Les tableaux d'utilisation

Un tableau d'utilisation accompagne chaque programme de cette bibliothèque : il vous indique la procédure à suivre pour utiliser au mieux vos programmes.

Il se présente sous la forme de 5 colonnes intitulées : N°, INSTRUCTIONS, DONNÉES, FONCTIONS, AFFICHAGE.

— N° : donne les numéros des instructions utilisateur (pas de la procédure)

— INSTRUCTIONS : indique les opérations à effectuer

— DONNÉES : indique les valeurs à introduire et éventuellement l'unité ou la réponse alphanumérique correcte à la question posée. Les touches utilisées sont : les touches numériques de 0 à 9, le point décimal, [EEX] (exposant) et [CHS] (changement de signal)

— FONCTIONS : indique la ou les touches à utiliser après l'introduction des données. Lorsqu'une information apparaît en jaune dans la colonne DONNÉES ou FONCTIONS, appuyez sur la touche ALPHA, mode alphanumérique.

Par exemple [XEQ] ΣBSTAT signifie : appuyez sur [XEQ] [ALPHA] ΣBSTAT [ALPHA].

Après introduction de l'instruction, vous devez appuyer à nouveau sur [ALPHA] pour remettre le HP-41C en mode calcul.

— AFFICHAGE : donne l'ensemble des messages numériques et alphanumériques affichés au cours du programme.

Au-dessus de la colonne AFFICHAGE, une case étiquetée TAILLE indique le nombre minimum de registres nécessaires à l'exécution du programme. Nous vous conseillons d'affecter une taille suffisante (instruction SIZE) à la mémoire programme avant de charger un programme. Consultez le manuel d'utilisation du HP-41C qui donne des précisions sur cette opération.

Catalogue

Lorsqu'un module d'application est connecté dans l'un des logements du HP-41C, la fonction CATALOG 2 permet de visualiser son contenu. Vous obtenez ainsi un listage des labels principaux de ce module, ainsi que les fonctions ou labels de toutes les autres extensions qui lui sont connectées. Le listage commence par l'extension connectée au logement 1 et finit par celle connectée en 4.

Notation des modes ALPHA et USER

Ce manuel utilise une notation spéciale pour le mode alphanumérique. Lorsque, dans un tableau d'utilisation, une instruction est imprimée en jaune, vous devez appuyer sur la touche ALPHA avant de composer la mnémonique. Après l'introduction de l'instruction, vous devez appuyer à nouveau sur ALPHA pour remettre le HP-41C en mode calcul. Par exemple : XEQ ΣBSTAT signifie : XEQ ΣBSTAT ALPHA. En mode utilisateur, les références aux deux premiers rangs de touches (redéfinies) utilisent les symboles A, C, E, ■ A et R/S.

Utilisation de l'imprimante optionnelle

Lorsque l'imprimante est connectée au HP-41C, tous les résultats des programmes de cette bibliothèque sont automatiquement imprimés. Si vous voulez imprimer aussi les données introduites, placez le commutateur de mode d'impression sur NORMAL, toutes les valeurs et séquences de pressions de touches correspondantes seront imprimées.

Copie de programme du module

Si vous désirez suivre l'exécution, modifier, enregistrer sur carte magnétique ou lister un programme de ce module d'applications, vous devez d'abord copier ce programme dans la mémoire interne du HP-41C. Le manuel d'utilisation du HP-41C vous donne les informations concernant la fonction COPY.

Il n'est pas nécessaire de copier un programme en mémoire pour l'exécuter.

Interruption de programme

Ces programmes sont conçus pour être exécutés d'un bout à l'autre sans interruption. Si le HP-41C est mis sur OFF pendant l'exécution d'un de ces programmes, il peut être nécessaire d'armer l'indicateur 21 avant de relancer l'exécution.

Utilisation des labels

Des problèmes peuvent apparaître lorsque vous utilisez pour vos propres programmes des labels présents dans un module d'application.

Affectations de touches

Si vous avez personnalisé votre clavier avec la fonction $\boxed{\text{ASN}}$, ces réaffectations auront priorité sur les labels locaux A, C et E utilisés dans cette bibliothèque.

Indicateur binaire 03

Si l'indicateur 03 est armé lors de l'exécution d'un programme de la bibliothèque statistique, les registres statistiques pourront ne pas être effacés et des réponses erronées peuvent en résulter.

Statistiques fondamentales sur deux variables

Pour des couples de données (x, y), ce programme calcule les moyennes, les écart-types, les covariances, les coefficients de corrélation, les coefficients de variation, les sommes, les sommes des produits et les sommes des carrés. En entrées peuvent être utilisés un ensemble de couples de données non groupées (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n\}$, ou un ensemble de données groupées $\{(x_i, y_i, f_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$ f_i étant la fréquence de répétition du couple (x_i, y_i).

moyenne $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

écart-type $s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$

$$\left(\text{or } s_x' = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}}\right)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}}$$

$$\left(\text{or } s_y' = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2}{n}}\right)$$

covariance $S_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right)$

$$\left(\text{or } S_{xy}' = \frac{1}{n}\left[\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right]\right)$$

coefficient de corrélation $\gamma_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$

coefficient de variation $V_x = \frac{S_x}{\bar{x}} \cdot 100, \qquad V_y = \frac{S_y}{\bar{y}} \cdot 100$

Note : n est un entier supérieur à 1.

SIZE: 012

N°	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
	Données non groupées			
1.	Initialisation		XEQ ΣBSTAT	ΣBSTAT
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1,2, ...,n$; introduire x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	Pour effectuer une correction, introduire x_k, y_k	x_k	ENTER↑	
		y_k	C	$(k-1)$
4.	Aller en 8 pour les statistiques fondamentales			
	Données groupées			
5.	Initialisation		XEQ ΣBSTG	ΣBSTG
6.	Répéter les pas 6 et 7 pour $i = 1,2, ...,n$; introduire x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	ENTER↑	
	f_i	f_i	A	(Σf_i)
7.	Pour effectuer une correction, introduire x_k, y_k, f_k	x_k	ENTER↑	
		y_k	ENTER↑	
		f_k	C	$(\Sigma f_i - f_k)$
8.	Statistiques fondamentales :			
	$\bar{x}$		E	XBAR=$(\bar{x})$
	$\bar{y}$		R/S	YBAR=$(\bar{y})$
	s_x		R/S	SX=(s_x)
	s'_x		R/S	SX.=(s'_x)
	s_y		R/S	SY=(s_y)
	s'_y		R/S	SY.=(s'_y)
	v_x*		R/S	VX=(v_x)
	v_y*		R/S	VY=(v_y)
	s_{xy}		R/S	SXY=(s_{xy})
	s'_{xy}		R/S	SXY.=(s'_{xy})
	γ_{xy}		R/S	GXY=(γ_{xy})
	Σx_i		R/S	ΣX=(Σx_i)
	Σy_i		R/S	ΣY=(Σy_i)
	$\Sigma x_i y_i$		R/S	ΣXY=$(\Sigma x_i y_i)$
	Σx_i^2		R/S	ΣX2=(Σx_i^2)
	Σy_i^2		R/S	ΣY2=(Σy_i^2)
9.	Répétez le pas 8, si vous voulez de nouveau obtenir les résultats			
10.	Pour utiliser le programme avec un autre jeu de données, initialisation par		A	ΣBSTAT or ΣBSTG
	puis aller en 2 ou en 6			
11.	Pour utiliser l'autre programme, aller en 1 ou en 5			

*NOTE : DATA ERROR est affiché si $\bar{x}$ ou $\bar{y}$ égale zéro ; appuyer sur R/S et continuer

Exemple 1 :

Pour les données ci-dessous calculer les moyennes, écart-types, la covariance, le coefficient de corrélation, le coefficient de variation et les sommes.

x_i	26	30	44	50	62	68	74
y_i	92	85	78	81	54	51	40

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣBSTAT [ALPHA]	ΣBSTAT
26 [ENTER↑] 92 [A]	
100 [ENTER↑] 100 [A]	
100 [ENTER↑] 100 [C]	
30 [ENTER↑] 85 [A]	
44 [ENTER↑] 78 [A]	
50 [ENTER↑] 81 [A]	
62 [ENTER↑] 54 [A]	
68 [ENTER↑] 51 [A]	
74 [ENTER↑] 40 [A]	7,00
[E]	XBAR=50,57
[R/S]	YBAR=68,71
[R/S]	SX=18,50
[R/S]	SX.=17,13
[R/S]	SY=20,00
[R/S]	SY.=18,51
[R/S]	VX=36,58
[R/S]	VY=29,10
[R/S]	SXY=−354,14
[R/S]	SXY.=−303,55
[R/S]	GXY=−0,96
[R/S]	ΣX=354,00
[R/S]	ΣY=481,00
[R/S]	ΣXY=22.200,00
[R/S]	ΣX2=19.956,00
[R/S]	ΣY2=35.451,00

Exemple 2 :

Utiliser le programme sur les données groupées qui suivent :

x_i	4,8	5,2	3,8	4,4	4,1
y_i	15,1	11,5	14,3	13,6	12,8
f_i	1	3	1	6	2

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣBSTG [ALPHA]	ΣBSTG
4.8 [ENTER↑] 15.1 [ENTER↑] 1 [A]	
5.2 [ENTER↑] 11.5 [ENTER↑] 3 [A]	
3.8 [ENTER↑] 14.3 [ENTER↑] 1 [A]	
4.4 [ENTER↑] 13.6 [ENTER↑] 6 [A]	
4.1 [ENTER↑] 12.8 [ENTER↑] 2 [A]	13,00
[E]	XBAR=4,52
[R/S]	YBAR=13,16
[R/S]	SX=0,45
[R/S]	SX.=0,43
[R/S]	SY=1,11
[R/S]	SY.=1,07
[R/S]	VX=9,93
[R/S]	VY=8,42
[R/S]	SXY=-0,31
[R/S]	SXY.=-0,28
[R/S]	GXY=-0,62
[R/S]	ΣX=58,80
[R/S]	ΣY=171,10
[R/S]	ΣXY=770,22
[R/S]	ΣX2=268,38
[R/S]	ΣY2=2.266,99

Moments, asymétrie et aplatissement (données groupées ou non)

Pour des données groupées ou non groupées, les moments servent à décrire les ensembles de données, le coefficient d'asymétrie mesure le manque de symétrie d'une distribution, et le coefficient d'aplatissement son caractère relativement pointu ou aplati. Pour un ensemble de données $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

Moment d'ordre 1 $\quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Moment d'ordre 2 $\quad m_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$

Moment d'ordre 3 $\quad m_3 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^3 - \frac{3}{n} \bar{x} \Sigma x_i^2 + 2\bar{x}^3$

Moment d'ordre 4 $\quad m_4 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^4 - \frac{4}{n} \bar{x} \Sigma x_i^3 + \frac{6}{n} \bar{x}^2 \Sigma x_i^2 - 3\bar{x}^4$

Coefficient d'asymétrie

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$$

Coefficient d'aplatissement

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Ce programme permet d'effectuer les mêmes calculs pour des données groupées (à l'aide des mêmes formules que pour les données non groupées) :

Données	x_1	x_2	...	x_n
Fréquences	f_1	f_2	...	f_n

Noter que dans ce cas le moment d'ordre 1,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

Référence :

Theory and Problems of Statistics, M. R. Spiegel, *Schaum's Outline*, McGraw Hill, 1961.

				Taille : 012
N°	**Instruction**	**Donnée**	**Fonction**	**Affichage**
	DONNÉES NON GROUPÉES			
1.	Initialisation		XEQ ΣMMTUG	ΣMMTUG
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1,2, ...,n$; introduire x_i	x_i	A	(i)
3.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k	x_k	C	(k−1)
4.	Aller en 8 pour les calculs de moments			
	DONNÉES GROUPÉES			
5.	Initialisation		XEQ ΣMMTGD	ΣMMTGD
6.	Répéter les pas 6 et 7 pour $j = 1,2, ...,m$; introduire y_j f_j	x_j f_j	ENTER↑ A	 (j)
7.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de y_h et de f_h	x_h f_h	ENTER↑ C	 (h−1)
8.	Calcul des moments : $\bar{x}$ m_2 m_3 m_4 γ_1 γ_2		 E R/S R/S R/S R/S R/S	 XBAR=($\bar{x}$) M2=(m_2) M3=(m_3) M4=(m_4) GM1=(γ_1) GM2=(γ_2)
9.	Répéter le pas 8 si vous voulez à nouveau les résultats			
10.	Pour le même programme avec d'autres données Puis aller au pas 2 ou 6		A	ΣMMTUG or ΣMMTGD
11.	Pour utiliser l'autre programme aller en 1 ou en 5			

Exemples :

1. Données non groupées

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,1	3,5	4,2	6,5	4,1	3,6	5,3	3,7	4,9

$$\bar{x} = 4{,}21\ ;\ m_2 = 1{,}39\ ;\ m_3 = 0{,}39\ ;\ m_4 = 5{,}49$$

$$\gamma_1 = 0{,}24\ ;\ \gamma_2 = 2{,}84$$

Appuyer Sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣMMTUG [ALPHA]	ΣMMTUG
2.1 [A] 3.5 [A] 4.0 [A] 4.0 [C]	
4.2 [A] 6.5 [A] 4.1 [A] 3.6 [A]	
5.3 [A] 3.7 [A] 4.9 [A]	9,00
[E]	XBAR=4,21
[R/S]	M2=1,39
[R/S]	M3=0,39
[R/S]	M4=5,49
[R/S]	GM1=0,24
[R/S]	GM2=2,84

2. Données groupées

i	1	2	3	4	5
x_i	3	2	4	6	1
f_i	4	5	3	2	1

$$\bar{x} = 3{,}13\ ;\ m_2 = 1{,}98\ ;\ m_3 = 2{,}14\ ;\ m_4 = 11{,}05$$

$$\gamma_1 = 0{,}77\ ;\ \gamma_2 = 2{,}81$$

Appuyer sur	**Affichage**
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 012	
[XEQ] [ALPHA] ΣMMTGD [ALPHA]	*ΣMMTGD*
3 [ENTER↑] 4 [A] 2 [ENTER↑] 5 [A]	
4 [ENTER↑] 4 [A] 4 [ENTER↑] 4 [C]	
4 [ENTER↑] 3 [A] 6 [ENTER↑] 2 [A]	
1 [ENTER↑] 1 [A]	*5,00*
[E]	*XBAR=3,13*
[R/S]	*M2=1,98*
[R/S]	*M3=2,14*
[R/S]	*M4=11,05*
[R/S]	*GM1=0,77*
[R/S]	*GM2=2,81*

Analyse de variance
(une variable à la fois)

On utilise l'analyse de la variance (une variable à la fois) pour savoir si les différences observées entre les moyennes de k échantillons sont dues au hasard ou sont représentatives de différences entre les moyennes réelles des populations. Supposons que le $i^{ème}$ échantillon ait n_i observations (les échantillons peuvent avoir un nombre égal ou inégal d'observations). On souhaite vérifier l'hypothèse nulle : les moyennes des k populations sont toutes égales. Le programme génère l'ensemble du tableau ANOVA.

1. Moyenne des observations du $i^{ème}$ échantillon ($i = 1, 2, \ldots, k$)

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

2. Écart-type des observations du $i^{ème}$ échantillon

$$s_i = \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - n_i \bar{x}_i^2 \right) \Big/ (n_i - 1) \right]^{1/2}$$

3. Somme des observations du $i^{ème}$ échantillon

$$\mathrm{Sum}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

4. Somme totale des carrés

$$TSS = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

5. Somme des carrés de l'analyse

$$TrSS = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{n_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

6. Erreur sur la somme des carrés

$$ESS = TSS - TrSS$$

7. Degrés de liberté de l'analyse

$$df_1 = k - 1$$

8. Erreur sur les degrés de liberté

$$df_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

9. Total des degrés de liberté

$$df_3 = df_1 + df_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i -$$

10. Moyenne des carrés de l'analyse

$$TrMS = \frac{TrSS}{df_1}$$

11. Erreur sur la moyenne des carrés

$$EMS = \frac{ESS}{df_2}$$

Référence :

J.-E. Freund, *Mathematical Statistics*, Prentice Hall, 1962.

				Taille : 020
N°	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
1.	Initialisation		XEQ ΣAOVONE	ΣAOVONE
2.	Répéter les pas 2 à 5 pour $i = 1, 2, ..., k$			
3.	Répéter les pas 3 à 4 pour $j = 1, 2, ..., n_i$; introduire x_{ij}	x_{ij}	A	(j)
4.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_{im}	x_{im}	C	(m−1)
5.	Pour calculer : la moyenne $\overline{x}_i$ l'écart type Ss_i la somme Σ_i		R/S R/S R/S	XBAR=($\overline{x}_i$) S=(s_i) SUM=(Sum_i)
6.	Pour calculer le tableau ANOVA : TSS TrSS ESS df_i df_2 df_3 TrMS EMS F		E R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S	TSS=(TSS) TRSS=(TrSS) ESS=(ESS) DF1=(df_1) DF2=(df_2) DF3=(df_3) TRMS=(TrMS) EMS=(EMS) F=(F)
7.	Répéter le pas 6, si vous voulez les résultats à nouveau.			
8.	Pour un autre jeu de données, initialisation par Puis aller en 2		■ A	ΣAOVONE

Exemple 1 :

On trouvera ci-dessous quatre échantillons (notes d'examen obtenues par des élèves) de quatre écoles différentes.

Note de l'examen

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
École 1	88	99	96	68	85		
École 2	78	62	98	83	61	88	
École 3	80	61	74	92	78	54	77
École 4	71	65	90	46			

Calculer le tableau ANOVA et tester l'hypothèse nulle que les différences entre les moyennes des échantillons peuvent être attribuées au hasard. Utiliser une probabilité à 0,01 % près.

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 020	
[XEQ] [ALPHA] ΣAOVONE [ALPHA]	*ΣAOVONE*
88 [A] 99 [A] 96 [A] 68 [A]	
85 [A]	*5,00*
[R/S]	*XBAR=87,20*
[R/S]	*S=12,15*
[R/S]	*SUM=436,00*
78 [A] 62 [A] 98 [A] 83 [A]	*6,00*
61 [A] 88 [A]	*XBAR=78,33*
[R/S]	*S=14,62*
[R/S]	*SUM=470,00*
[R/S]	
80 [A] 61 [A] 74 [A] 92 [A]	
78 [A] 54 [A] 77 [A]	*7,00*
[R/S]	*XBAR=73,71*
[R/S]	*S=12,61*
[R/S]	*SUM=516,00*
71 [A] 66 [A] 66 [C] 65 [A]	
90 [A] 46 [A]	*4,00*
[R/S]	*XBAR=68,00*
[R/S]	*S=18,13*
[R/S]	*SUM=272,00*
[E]	*TSS=4.530,00*
[R/S]	*TRSS=930,44*
[R/S]	*ESS=3.599,56*
[R/S]	*DF1=3,00*
[R/S]	*DF2=18,00*
[R/S]	*DF3=21,00*
[R/S]	*TRMS=310,15*
[R/S]	*EMS=199,98*
[R/S]	*F=1,55*

Tableau ANOVA

	SS	df	MS	F
Analyse	930,44	3	310,15	1,55
Erreur	3.599,56	18	199,98	
Total	4.530,00	21		

Comme F = 1.55 est inférieur à $F_{.01,\ 3,\ 18}$ = 5.09, l'hypothèse nulle ne peut pas être rejetée. On en conclut que les moyennes des résultats dans les quatre écoles ne sont pas significativement différentes.

Analyse de variance
(deux variables, sans duplication)

L'analyse de la variance d'un ensemble de données consiste à essayer d'attribuer la variabilité totale (mesurée par la somme totale des carrés) à plusieurs facteurs de variation.

L'analyse de la variance à deux variables teste indépendamment l'effet de ligne et l'effet de colonne. Ce programme génère le tableau ANOVA dans le cas où : (1) chaque case n'a qu'une observation et (2) les effets des lignes et des colonnes sont sans interaction.

Équations :

1. Sommes

$$\text{lignes } RS_i = \sum_j x_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$\text{colonnes } CS_j = \sum_i x_{ij} \qquad j = 1, 2, \ldots, c$$

2. Sommes des carrés

$$\text{total } TSS = \Sigma\Sigma x_{ij}^2 - (\Sigma\Sigma x_{ij})^2/rc$$

$$\text{lignes } RSS = \sum_i \left(\sum_j x_{ij}\right)^2 /c - (\Sigma\Sigma x_{ij})^2/rc$$

$$\text{colonnes } CSS = \sum_j \left(\sum_i x_{ij}\right)^2 /r - (\Sigma\Sigma x_{ij})^2/rc$$

$$\text{erreur } ESS = TSS - RSS - CSS$$

3. Degrés de liberté

$$\text{lignes } df_1 = r - 1$$
$$\text{colonnes } df_2 = c - 1$$
$$\text{erreurs } df_3 = (r - 1)(c - 1)$$

4. Rapports F

$$\text{lignes } F_1 = \frac{RSS}{df_1} \bigg/ \frac{ESS}{df_3}$$

$$\text{colonnes } F_2 = \frac{CSS}{df_2} \bigg/ \frac{ESS}{df_3}$$

Référence :

Dixon et Massey, *Introduction to Statistical Analysis*, McGraw-Hill, 1969.

				Taille : 018
Nº	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
1.	Initialisation		XEQ ΣAOVTWO	ΣAOVTWO
	SOMME DES LIGNES			
2.	Répéter les pas 2 à 5 pour $i = 1, 2, ..., r$			
3.	Répéter les pas 3 et 4 pour $j = 1, 2, ..., c$; introduire x_{ij}	x_{ij}	A	(j)
4.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_{im}	x_{im}	C	(m−1)
5.	Calcul de la somme des lignes et initialisation pour la ligne suivante		R/S	SUM=(RS_i)
6.	Après la ligne r, initialisation pour les colonnes		R/S	COLUMN-WISE
	SOMME DES COLONNES			
7.	Répéter les pas 7 à 10 pour $j = 1, 2, ..., c$			
8.	Répéter les pas 8 et 9 pour $i = 1, 2, ..., r$; introduire x_{ij}	x_{ij}	A	(i)
9.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_{kj}	x_{hj}	C	(h−1)
10.	Calcul de la somme des colonnes et initialisation pour la colonne suivante		R/S	SUM=(CS_j)
11.	Calcul du tableau ANOVA			
	RSS		E	RSS=(RSS)
	CSS		R/S	CSS=(CSS)
	TSS		R/S	TSS=(TSS)
	ESS		R/S	ESS=(ESS)
	df_1		R/S	DF1=(df_1)
	df_2		R/S	DF2=(df_2)
	df_3		R/S	DF3=(df_3)
	F_1		R/S	F1=(F_1)
	F_2		R/S	F2=(F_2)
12.	Répéter le pas 11 si vous voulez à nouveau les résultats			
13.	Pour un autre jeu de données initialisation par puis aller en 2		■ A	ΣAOVTWO

Exemple :

Appliquer le programme à l'analyse de l'ensemble des données suivantes :

i \ j		Colonnes 1	2	3	4
Lignes	1	7	6	8	7
	2	2	4	4	4
	3	4	6	5	3

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 018	
[XEQ] [ALPHA] ΣAOVTWO [ALPHA]	*ΣAOVTWO*
7 [A] 6 [A] 8 [A] 7 [A]	*4,00*
[R/S]	*SUM=28,00*
2 [A] 4 [A] 4 [A] 4 [A]	*4,00*
[R/S]	*SUM=14,00*
4 [A] 7 [A] 7 [C] 6 [A] 5 [A]	
3 [A]	*4,00*
[R/S]	*SUM=18,00*
[R/S]	*COLUMN-WISE*
7 [A] 2 [A] 4 [A]	*3,00*
[R/S]	*SUM=13,00*
6 [A] 4 [A] 6 [A]	*3,00*
[R/S]	*SUM=16,00*
8 [A] 4 [A] 5 [A]	*3,00*
[R/S]	*SUM=17,00*
7 [A] 4 [A] 3 [A]	*3,00*
[R/S]	*SUM=14,00*
[E]	*RSS=26,00*
[R/S]	*CSS=3,33*
[R/S]	*TSS=36,00*
[R/S]	*ESS=6,67*
[R/S]	*DF1=2,00*
[R/S]	*DF2=3,00*
[R/S]	*DF3=6,00*
[R/S]	*F1=11,70*
[R/S]	*F2=1,00*

Tableau ANOVA

	SS	df	Rapport F
Lignes	26,00	2	11,70
Colonnes	3,33	3	1,00
Erreur	6,67	6	
Total	36,00		

Analyse de covariance
(une variable à la fois)

L'analyse de la covariance pour une variable teste l'effet de cette variable en le séparant de celui de la seconde variable, cette dernière représentant des mesures réelles pour chaque individu (plutôt que pour une catégorie).

Soit (x_{ij}, y_{ij}) la $j^{ème}$ observation de la $i^{ème}$ population ($i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$). Remarquer que les échantillons peuvent comporter un nombre égal ou inégal d'observations. L'analyse de la covariance teste la différence des moyennes des valeurs résiduelles. Les valeurs résiduelles sont les différences entre les observations et les résultats de la régression conduite sur la seconde variable. L'analyse de la covariance est fondée sur la décomposition des sommes de carrés et des sommes de produits en plusieurs éléments. Le programme génère l'ensemble du tableau ANOCOV.

Équations :

1. Sommes et sommes des carrés

$$Sx_i = \sum_j x_{ij} \; (i = 1,2,\ldots,k)$$

$$TSSx = \Sigma\Sigma x_{ij}^2 - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})^2}{\sum_i n_i}$$

$$ASSx = \sum_i \frac{\left(\sum_j x_{ij}\right)^2}{n_i} - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})^2}{\sum_i n_i}$$

$$WSSx = TSSx - ASSx$$

2. Degrés de liberté

$$df_1 = k - 1$$

$$df_2 = \sum_i n_i - k$$

3. Moyenne des carrés et test F

$$AMSx = \frac{ASSx}{df_1}$$

$$WMSx = \frac{WSSx}{df_2}$$

$$F_x = \frac{AMSx}{WMSx} \text{ avec degrés de liberté } df_1, df_2$$

Les mêmes formules pour γ_{ij} s'obtiennent en remplaçant x_{ij} par γ_{ij}.

4. Sommes des produits

$$TSP = \Sigma\Sigma x_{ij}\, y_{ij} - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})\,(\Sigma\Sigma y_{ij})}{\sum_i n_i}$$

$$ASP = \sum_i \frac{\left(\sum_j x_{ij}\right)\left(\sum_j y_{ij}\right)}{n_i} - \frac{(\Sigma\Sigma x_{ij})\,(\Sigma\Sigma y_{ij})}{\sum_i n_i}$$

$$WSP = TSP - ASP$$

5. Sommes résiduelles des carrés

$$TSS\hat{y} = TSSy - \frac{(TSP)^2}{TSSx}$$

$$WSS\hat{y} = WSSy - \frac{(WSP)^2}{WSSx}$$

$$ASS\hat{y} = TSS\hat{y} - WSS\hat{y}$$

6. Degrés de liberté résiduels

$$df_3 = k - 1$$

$$df_4 = \sum_i n_i - k - 1$$

7. Moyenne résiduelle des carrés et test F

$$AMS\hat{y} = \frac{ASS\hat{y}}{df_3}$$

$$WMS\hat{y} = \frac{WSS\hat{y}}{df_4}$$

$$F = \frac{AMS\hat{y}}{WMS\hat{y}} \text{ avec degrés de liberté } df_3,\ df_4$$

Tableau ANOCOV

					Résiduels			
	degrés de liberté	SSx	SP	SSy	degrés de liberté	$SS\hat{y}$	$MS\hat{y}$	F statistique
dans les moyennes	df_1	ASSx	ASP	ASSy	df_3	$ASS\hat{y}$	$AMS\hat{y}$	F
dans les groupes	df_2	WSSx	WSP	WSSy	df_4	$WSS\hat{y}$	$WMS\hat{y}$	
Total		TSSx	TSP	TSSy		$TSS\hat{y}$		

Remarque :

1. On peut utiliser F_x pour tester l'égalité des moyennes de x (tableau ANOVA pour x).
2. On peut utiliser F_y pour tester l'égalité des moyennes de y (sans tenir compte des valeurs de x). (Tableau ANOVA pour y non ajustée.)

Référence :

Dixon et Massey, *Introduction to Statistical Analysis*, McGraw-Hill, 1969.

				Taille : 026
Nº	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
1.	Initialisation		XEQ ΣANOCOV	ΣANOCOV (pse) NEW I=1.00
2.	Répéter les pas 2 à 6 pour i = 1, 2, ...,k			
3.	Répéter les pas 3 et 4 pour j = 1, 2, ..., n_j ; introduire x_{ij}, y_{ij}	x_{ij} y_{ij}	ENTER↑ A	 (j)
4.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_{im} et y_{im}	x_{im} y_{im}	ENTER↑ C	 (m−1)
5.	Calculer les sommes : Sx_i Sy_i		R/S R/S	SX=(Sx_i) SY=(Sy_i)
6.	Pour un autre i		R/S	NEW I=(i)
7.	Pour calculer le tableau ANOCOV : TSSx ASSx WSSx TSSy ASSy WSSy df_1 df_2 Fx Fy TSP ASP WSP TSSŷ WSSŷ ASSŷ df_3 df_4 AMSŷ WMSŷ F		 E R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S R/S	 TSSX=(TSSx) ASSX=(ASSx) WSSX=(WSSx) TSSY=(TSSy) ASSY=(ASSy) WSSY=(WSSy) DF1=(df_1) DF2=(df_2) FX=(Fx) FY=(Fy) TSP=(TSP) ASP=(ASP) WSP=(WSP) TSSY.=(TSSŷ) WSSY.=(WSSŷ) ASSY.=(ASSŷ) DF3=(df_3) DF4=(df_4) AMSY.=(AMSŷ) WMSY.=(WMSŷ) F=(F)
8.	Répéter le pas 7 pour obtenir à nouveau les résultats			
9.	Pour un autre jeu de données initialisation par puis aller en 2		■ A	ΣANOCOV (pse) NEW I=1.00

Exemple :

i		x/y	j = 1	2	3	4
	1	x	3	2	1	2
		y	10	8	8	11
	2	x	4	3	3	5
		y	12	12	10	13
	3	x	1	2	3	1
		y	6	5	8	7

($k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 4$)

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 026	
[XEQ] [ALPHA] ΣANOCOV [ALPHA]	ΣANOCOV (Pse)
	NEW I = 1,00
3 [ENTER↑] 10 [A] 2 [ENTER↑] 8 [A]	
5 [ENTER↑] 5 [A] 5 [ENTER↑] 5 [C]	
1 [ENTER↑] 8 [A] 2 [ENTER↑] 11 [A]	4,00
[R/S]	SX=8,00
[R/S]	SY=37,00
[R/S]	NEW I=2,00
4 [ENTER↑] 12 [A] 3 [ENTER↑] 12 [A]	
3 [ENTER↑] 10 [A] 5 [ENTER↑] 13 [A]	4,00
[R/S]	SX=15,00
[R/S]	SY=47,00
[R/S]	NEW I=3,00
1 [ENTER↑] 6 [A] 2 [ENTER↑] 5 [A]	
3 [ENTER↑] 8 [A] 1 [ENTER↑] 7 [A]	4,00
[R/S]	SX=7,00
[R/S]	SY=26,00
[R/S]	NEW I=4,00
[E]	TSSX=17,00
[R/S]	ASSX=9,50
[R/S]	WSSX=7,50
[R/S]	TSSY=71,67
[R/S]	ASSY=55,17
[R/S]	WSSY=16,50
[R/S]	DF1=2,00
[R/S]	DF2=9,00
[R/S]	FX=5,70

R/S	FY=15,05
R/S	TSP=27,00
R/S	ASP=20,75
R/S	WSP=6,25
R/S	TSSY.=28,78
R/S	WSSY.=11,29
R/S	ASSY.=17,49
R/S	DF3=2,00
R/S	DF4=8,00
R/S	AMSY.=8,75
R/S	WMSY.=1,41
R/S	F=6,20

Tableau ANOCOV

					Résiduels			
	df	SSx	SP	SSy	df	SSŷ	MSŷ	F
dans les moyennes	2	9.50	20.75	55.17	2	17.49	8.75	6.20
dans les groupes	9	7.50	6.25	16.50	8	11.29	1.41	
Total		17.00	27.00	71.67		28.78		

Ajustement de courbe

Pour un ensemble de données de couples $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, ce programme ajuste les données à toute équation de la forme :

1) droite : $y = a + bx$

2) exponentielle : $y = ae^{bx}$, $(a > 0)$

3) logarithme : $y = a + b \ln x$

4) puissance : $y = ax^b$, $(a > 0)$

Les coefficients de régression a et b peuvent être calculés en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma Y_i X_i \end{bmatrix}$$

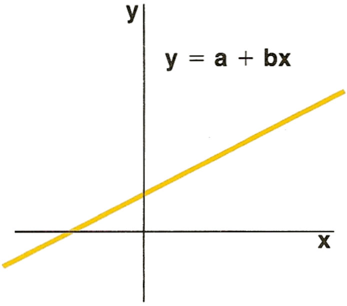
où les variables sont définies comme suit :

Régression	A	X_i	Y_i
linéaire	a	x_i	y_i
exponentielle	ln a	x_i	$\ln y_i$
logarithmique	a	$\ln x_i$	y_i
puissance	ln a	$\ln x_i$	$\ln y_i$

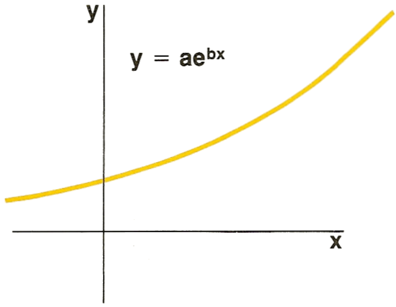
Le coefficient de détermination R^2 est :

$$R^2 = \frac{A\Sigma Y_i + b\Sigma X_i\, Y_i - \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2}{\Sigma(Y_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2}$$

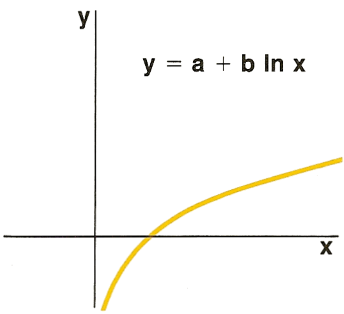
Régression linéaire



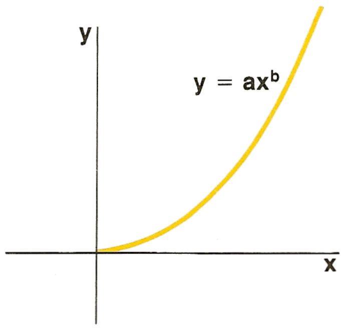
Ajustement exponentiel



Ajustement logarithmique



Ajustement puissance



Remarques :

1) Le programme applique la méthode des moindres carrés, soit aux équations initiales (droite et courbe log.) soit aux équations transformées (courbes exponentielle et puissance).
2) Les valeurs négatives et nulles de x_i sont des conditions d'erreur pour l'ajustement logarithmique. De même les valeurs négatives et nulles de y_i pour l'ajustement exponentiel. Pour l'ajustement puissance, x_i et y_i doivent être positifs non nuls.
3) La précision des coefficients de régression diminue lorsque les différences entre les valeurs de x et de y diminuent.

				Taille : 016
Nº	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
1.	Initialisation pour DROITE → EXPONENTIELLE → LOGARITHME → PUISSANCE →		 XEQ ΣLIN XEQ ΣEXP XEQ ΣLOG XEQ ΣPOW	 ΣLIN ΣEXP ΣLOG ΣPOW
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour i = 1, 2, ...,n ; introduire x_i y_i	 x_i y_i	 ENTER↑ A	 (i)
3.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k et y_k	 x_k y_k	 ENTER↑ C	 (k − 1)
4.	Calcul de R^2 et de a et b (coefficients de régression)		E R/S R/S	R2 = (R^2) a = (a) b = (b)
5.	Calcul de y estimé pour x donné	x	R/S	Y. = ($\hat{y}$)
6.	Répéter le pas 5 pour différents x			
7.	Répéter le pas 4 pour obtenir à nouveau les résultats			
8.	Pour utiliser le même programme avec un autre jeu de données, introduire le programme puis aller au pas 2		■ A	ΣLIN ou ΣEXP ou ΣLOG ou ΣPOW
9.	Pour un autre programme, aller en 1.			

Exemple 1

Ajustement linéaire du jeu de données suivant :

x_i	40.5	38.6	37.9	36.2	35.1	34.6
y_i	104.5	102	100	97.5	95.5	94

Solution :

$a = 33.53$, $b = 1.76$

$R^2 = 0.99$

i.e., $y = 33.53 + 1.76\,x$

Pour $x = 37$, $\hat{y} = 98.65$

Pour $x = 35$, $\hat{y} = 95.13$

Appuyer sur	Affichage
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 016	
XEQ ALPHA ΣLIN ALPHA	ΣLIN
40.5 ENTER↑ 104.5 A	
38.6 ENTER↑ 102 A	
37.9 ENTER↑ 100 A	
36.2 ENTER↑ 97.5 A	
35.2 ENTER↑ 95.5 A	
35.2 ENTER↑ 95.5 C	
35.1 ENTER↑ 95.5 A	
34.6 ENTER↑ 94 A	6,00
E	R2=0,99
R/S	a=33,53
R/S	b=1,76
37 R/S	Y.=98,65
35 R/S	Y.=95,13

Exemple 2

Ajustement à une exponentielle des données suivantes :

x_i	.72	1.31	1.95	2.58	3.14
y_i	2.16	1.61	1.16	.85	0.5

Solution :

$a = 3.45$, $b = -0.58$

$y = 3.45\, e^{-0.58x}$

$R^2 = 0.98$

Pour $x = 1.5$, $\hat{y} = 1.44$

Pour $x = 2$, $\hat{y} = 1.08$

Appuyer sur	Affichage
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 016	
XEQ ALPHA ΣEXP ALPHA	ΣEXP
.72 ENTER↑ 2.16 A	
1.31 ENTER↑ 1.61 A	
1.95 ENTER↑ 1.16 A	
2.58 ENTER↑ .85 A	
3.15 ENTER↑ .05 A	
3.15 ENTER↑ .05 C	
3.14 ENTER↑ 0.5 A	5,00
E	R2=0,98
R/S	a=3,45
R/S	b=−0,58
1.5 R/S	Y.=1,44
2.0 R/S	Y.=1,08

Exemple 3

Ajustement à une courbe logarithme du jeu de données suivant :

x_i	3	4	6	10	12
y_i	1.5	9.3	23.4	45.8	60.1

Solution :

$a = -47.02$, $b = 41.39$

$y = -47.02 + 41.39 \ln x$

$R^2 = 0.98$

Pour $x = 8$, $\hat{y} = 39.06$

Pour $x = 14.5$, $\hat{y} = 63.67$

Appuyer sur	Affichage
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 016	
XEQ ALPHA ΣLOG ALPHA	ΣLOG
3 ENTER↑ 1.5 A	
4 ENTER↑ 9.3 A	
6 ENTER↑ 23.4 A	
10 ENTER↑ 45.8 A	
12 ENTER↑ 6.01 A	
12 ENTER↑ 6.01 C	
12 ENTER↑ 60.1 A	5,00

Appuyer sur	Affichage
E	*R2=0,98*
R/S	*a=−47,02*
R/S	*b=41,39*
8 R/S	*Y.=39,06*
14.5 R/S	*Y.=63,67*

Exemple 4

Ajustement à une courbe puissance du jeu de données suivant :

x_i	10	12	15	17	20	22	25	27	30	32	35
y_i	0.95	1.05	1.25	1.41	1.73	2.00	2.53	2.98	3.85	4.59	6.02

Solution :

$a = .03$, $b = 1.46$

$y = .03x^{1.46}$

$R^2 = 0.94$

Pour $x = 18$, $\hat{y} = 1.76$

Pour $x = 23$, $\hat{y} = 2.52$

Appuyer sur	Affichage
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 016	
XEQ ALPHA ΣPOW ALPHA	*ΣPOW*
10 ENTER↑ 0.95 A	
12 ENTER↑ 1.05 A	
15 ENTER↑ 1.25 A	
17 ENTER↑ 1.41 A	
20 ENTER↑ 1.73 A	
22 ENTER↑ 2.00 A	
25 ENTER↑ 2.53 A	
27 ENTER↑ 2.98 A	
30 ENTER↑ 3.85 A	
32 ENTER↑ 4.59 A	
35 ENTER↑ 60.2 A	
35 ENTER↑ 60.2 C	
35 ENTER↑ 6.02 A	*11,00*
E	*R2=0,94*
R/S	*a=0,03*
R/S	*b=1,46*
18 R/S	*Y.=1,76*
23 R/S	*Y.=2,52*

Régression linéaire multiple

Trois variables indépendantes

Pour un ensemble de données (x_i, y_i, z_i, t_i), $i = 1, 2, ..., n$
Ce programme ajuste une équation linéaire de la forme :

$$t = a + bx + cy + dz$$

par la méthode des moindres carrés.

Les coefficients de régression a, b, c et d peuvent être calculés en résolvant le système suivant par la méthode d'élimination de Gauss avec pivot partiel.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma y_i & \Sigma z_i \\ \Sigma x_i & \Sigma(x_i)^2 & \Sigma(x_i y_i) & \Sigma(x_i z_i) \\ \Sigma y_i & \Sigma(y_i x_i) & \Sigma(y_i)^2 & \Sigma(y_i z_i) \\ \Sigma z_i & \Sigma(x_i z_i) & \Sigma(y_i z_i) & \Sigma(z_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma t_i \\ \Sigma x_i t_i \\ \Sigma y_i t_i \\ \Sigma z_i t_i \end{bmatrix}$$

Le coefficient de détermination R^2 est défini comme suit :

$$R^2 = \frac{a\Sigma t_i + b\Sigma x_i t_i + c\Sigma y_i t_i + d\Sigma z_i t_i - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}{\Sigma(t_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}$$

Deux variables indépendantes

Pour un ensemble de données $\{(x_1, y_i, t_i)\ i = 1, 2, ..., n\}$ ce programme ajuste une équation linéaire de la forme

$$t = a + bx + cy$$

par la méthode des moindres carrés.

Les coefficients de régression a, b, c, peuvent être calculés en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma (x_i)^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i & \Sigma y_i x_i & \Sigma (y_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma t_i \\ \Sigma x_i t_i \\ \Sigma y_i t_i \end{bmatrix}$$

Le coefficient de régression R^2 est défini comme suit :

$$R^2 = \frac{a\Sigma t_i + b\Sigma x_i t_i + c\Sigma y_i t_i - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}{\Sigma (t_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma t_i)^2}$$

Remarques :

- Si le déterminant de la matrice coefficient égale zéro, indiquant qu'il y a soit aucune solution soit plus d'une, le calculateur affiche « DATA ERROR ».

- Il n'y a pas de restriction au nombre maximum d'observations n, mais les conditions doivent être satisfaites :

  $n \geqslant 3$ dans le cas de deux variables indépendantes
  $n \geqslant 4$ dans le cas de trois variables indépendantes

Référence :

Bibliothèque mathématique I des HP-67/97, programme MA1-07.

				Taille : 045
Nº	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
	TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES			
1.	Initialisation		XEQ ΣMLRXYZ	ΣMLRXYZ
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1, 2, ..., n$; introduire x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	ENTER↑	
	z_i	z_i	ENTER↑	
	t_i	t_i	A	(i)
3.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k, y_k, z_k, t_k	x_k	ENTER↑	
		y_k	ENTER↑	
		z_k	ENTER↑	
		t_k	C	(k−1)
4.	Calcul de R^2 et des coefficients		E	R2=(R^2)
			R/S	a=(a)
			R/S	b=(b)
			R/S	c=(c)
			R/S	d=(d)
5.	Calcul de t estimé introduire x	x	ENTER↑	
	y	y	ENTER↑	
	z	z	R/S	T.=($\hat{t}$)
6.	Reprendre en 5 pour d'autres données			
7.	Pour rappeler les sommations effectuées au cours du calcul			
	Σx_i		RCL 32	(Σx_i)
	Σy_i		RCL 33	(Σy_i)
	Σz_i		RCL 34	(Σz_i)
	Σt_i		RCL 41	(Σt_i)
	Σx_i^2		RCL 35	(Σx_i^2)
	Σy_i^2		RCL 38	(Σy_i^2)
	Σz_i^2		RCL 40	(Σz_i^2)
	Σt_i^2		RCL 30	(Σt_i^2)
	$\Sigma x_i y_i$		RCL 36	($\Sigma x_i y_i$)
	$\Sigma x_i z_i$		RCL 37	($\Sigma x_i z_i$)
	$\Sigma x_i t_i$		RCL 42	($\Sigma x_i t_i$)
	$\Sigma y_i z_i$		RCL 39	($\Sigma y_i z_i$)
	$\Sigma y_i t_i$		RCL 43	($\Sigma y_i t_i$)
	$\Sigma z_i t_i$		RCL 44	($\Sigma z_i t_i$)
8.	Revenir au pas 4 pour obtenir à nouveau les résultats			
9.	Pour un autre jeu de données puis aller en 2		■ A	ΣMLRXYZ

Exemple 1 :

Calculer le polynôme de régression à trois variables indépendantes pour le jeu de données suivant :

i	1	2	3	4	5
x_i	7	1	11	11	7
y_i	25	29	56	31	52
z_i	6	15	8	8	6
t_i	60	52	20	47	33

Polynôme de la forme : $t = a + bx + cy + dz$

Solution :

Le polynôme calculé est $t = 103{,}45 - 1{,}28\ x - 1{,}04\ y - 1{,}34\ z$
avec $R^2 = 1{,}00$

Pour $x = 7$, $y = 25$, $z = 6$, $\hat{t} = 60{,}50$

Pour $x = 1$, $y = 29$, $z = 15$, $\hat{t} = 52{,}00$

Appuyer sur	**Affichage**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 045	
XEQ ALPHA ΣMLRXYZ ALPHA	*ΣMLRXYZ*
7 ENTER↑ 25 ENTER↑	
6 ENTER↑ 60 A	
1 ENTER↑ 29 ENTER↑	
15 ENTER↑ 52 A	
11 ENTER↑ 56 ENTER↑	
8 ENTER↑ 20 A	
11 ENTER↑ 31 ENTER↑	
8 ENTER↑ 47 A	
7 ENTER↑ 53 ENTER↑	
6 ENTER↑ 33 A	
7 ENTER↑ 53 ENTER↑	
6 ENTER↑ 33 C	
7 ENTER↑ 52 ENTER↑	
6 ENTER↑ 33 A	*5,00*
E	*R2=1,00*
R/S	*a=103,45*
R/S	*b=−1,28*
R/S	*c=−1,04*
R/S	*d=−1,34*
7 ENTER↑ 25 ENTER↑ 6 R/S	*T.=60,50*
1 ENTER↑ 29 ENTER↑ 15 R/S	*T.=52,00*

				Taille : 045
Nº	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
	DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES			
1.	Initialisation		XEQ ΣMLRXY	ΣMLRXY
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1, 2, ..., n$; introduire x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	ENTER↑	
	t_i	t_i	A	(i)
3.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k, y_k et t_k	x_k	ENTER↑	
		y_k	ENTER↑	
		t_k	C	(k−1)
4.	Calcul de R^2, a, b et c		E	R2=(R^2)
			R/S	a=(a)
			R/S	b=(b)
			R/S	c=(c)
5.	Calcul de t estimé pour x	x	ENTER↑	
	y	y	R/S	T.=($\hat{t}$)
6.	Reprendre en 5 pour d'autres x, y			
7.	Pour rappeler les sommations effectuées au cours du calcul			
	Σx_i		RCL 32	(Σx_i)
	Σy_i		RCL 33	(Σy_i)
	Σt_i		RCL 41	(Σt_i)
	Σx_i^2		RCL 35	(Σx_i^2)
	Σy_i^2		RCL 38	(Σy_i^2)
	Σt_i^2		RCL 30	(Σt_i^2)
	$\Sigma x_i y_i$		RCL 36	($\Sigma x_i y_i$)
	$\Sigma x_i t_i$		RCL 42	($\Sigma x_i t_i$)
	$\Sigma y_i t_i$		RCL 43	($\Sigma y_i t_i$)
8.	Revenir au pas 4 pour obtenir à nouveau les résultats			
9.	Pour un autre jeu de données initialisation par puis aller en 2		■ A	ΣMLRXY

Exemple 2 :

Calculer le polynôme de régression à deux variables indépendantes (t = a + bx + cy) pour le jeu de données suivant :

i	1	2	3	4
x_i	1.5	0.45	1.8	2.8
y_i	0.7	2.3	1.6	4.5
t_i	2.1	4.0	4.1	9.4

Solution :

Le polynôme calculé est t = − 0,10 + 0,79 x + 1,63 y avec R^2 = 1,00.

Pour x = 2, y = 3, $\hat{t}$ = 6,37

pour x = 1,5, y = 0,7 $\hat{t}$ = 2,23

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 045	
[XEQ] [ALPHA] ΣMLRXY [ALPHA]	ΣMLRXY
1.5 [ENTER↑] 0.7 [ENTER↑] 2.1 [A]	
0.46 [ENTER↑] 2.3 [ENTER↑] 4.0 [A]	
0.46 [ENTER↑] 2.3 [ENTER↑] 4.0 [C]	
0.45 [ENTER↑] 2.3 [ENTER↑] 4.0 [A]	
1.8 [ENTER↑] 1.6 [ENTER↑] 4.1 [A]	
2.8 [ENTER↑] 4.5 [ENTER↑] 9.4 [A]	4,00
[E]	R2=1,00
[R/S]	a=−0,10
[R/S]	b=0,79
[R/S]	c=1,63
2 [ENTER↑] 3 [R/S]	T.=6,37
1.5 [ENTER↑] 0.7 [R/S]	T.=2,23

Régression polynômiale

Régression cubique

Pour un ensemble de données (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, ce programme effectue l'ajustement à une équation de la forme :

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

par la méthode des moindres carrés.

Les coefficients de régression a, b, c et d sont calculés en résolvant le système suivant par la méthode d'élimination de Gauss avec pivot partiel :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i^3 y_i \end{bmatrix}$$

Le coefficient de détermination R^2 est défini comme suit :

$$R^2 = \frac{a\Sigma y_i + b\Sigma x_i y_i + c\Sigma x_i^2 y_i + d\Sigma x_i^3 y_i - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}{\Sigma(y_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}$$

Régression parabolique

Pour un ensemble de données (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, ce programme effectue l'ajustement à une équation de la forme :

$$y = a + bx + cx^2$$

par la méthode des moindes carrés.

Les coefficients de régression a, b et c peuvent être calculés en résolvant le système suivant par la méthode d'élimination de Gauss avec pivot partiel.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Le coefficient de détermination R^2 est défini comme suit :

$$R^2 = \frac{a\Sigma y_i + b\Sigma x_i y_i + c\Sigma x_i^2 y_i - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}{\Sigma(y_i^2) - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}$$

Remarques :

- Si le déterminant de la matrice coefficient égale zéro, indiquant pas de solution ou plusieurs solutions, le calculateur affiche « DATA ERROR ».
- Il n'y a pas de nombre maximal de points de données n, mais les conditions minimales suivantes doivent être respectées :
  $n \geqslant 3$ pour une régression parabolique
  $n \geqslant 4$ pour une régression cubique.

Référence :

Bibliothèque mathématique I, HP-67 et 97, programme MA1-07

Taille : 045

Nº	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
	RÉGRESSION CUBIQUE			
1.	Initialisation		XEQ ΣPOLYC	ΣPOLYC
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1, 2, ..., n$ introduire x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k, y_k	x_k	ENTER↑	
		y_k	C	(k−1)
4.	Calculer R^2, a, b, c, d		E	R2=(R^2)
			R/S	a=(a)
			R/S	b=(b)
			R/S	c=(c)
			R/S	d=(d)
5.	Calculer Y estimé ($\hat{y}$) pour x	x	R/S	Y.=($\hat{y}$)
6.	Pour d'autres x reprendre 5			
7.	Pour rappeler les sommations effectuées au cours des calculs			
	Σx_i		RCL 32	(Σx_i)
	Σx_i^2		RCL 33	(Σx_i^2)
	Σx_i^3		RCL 34	(Σx_i^3)
	Σx_i^4		RCL 37	(Σx_i^4)
	Σx_i^5		RCL 39	(Σx_i^5)
	Σx_i^6		RCL 40	(Σx_i^6)
	Σy_i		RCL 41	(Σy_i)
	$\Sigma x_i y_i$		RCL 42	($\Sigma x_i y_i$)
	$\Sigma x_i^2 y_i$		RCL 43	($\Sigma x_i^2 y_i$)
	$\Sigma x_i^3 y_i$		RCL 44	($\Sigma x_i^3 y_i$)
8.	Revenir au pas 4 pour obtenir à nouveau les résultats			
9.	Pour un autre jeu de données puis aller en 2		■ A	ΣPOLYC

Exemple 1 :

Calculer la régression cubique pour le jeu de données suivant :

i	1	2	3	4	5
x	.8	1	1.2	1.4	1.6
y	24	20	10	13	12

L'équation est de la forme : $y = a + bx + cx^2 + dx^3$.

Solution :

$y = 47{,}94 - 9{,}76\ x - 41{,}07\ x^2 + 20{,}83\ x^3$
$R^2 = 0{,}87$
Pour $x = 1$, $\hat{y} = 17{,}94$
Pour $x = 1{,}4$, $\hat{y} = 10{,}94$.

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 045	
[XEQ] [ALPHA] ΣPOLYC [ALPHA]	***ΣPOLYC***
.8 [ENTER↑] 24 [A]	
1 [ENTER↑] 20 [A]	
1.3 [ENTER↑] 10 [A]	
1.3 [ENTER↑] 10 [C]	
1.2 [ENTER↑] 10 [A]	
1.4 [ENTER↑] 13 [A]	
1.6 [ENTER↑] 12 [A]	***5,00***
[E]	***R2=0,87***
[R/S]	***a=47,94***
[R/S]	***b=−9,76***
[R/S]	***c=−41,07***
[R/S]	***d=20,83***
1 [R/S]	***Y.=17,94***
1.4 [R/S]	***Y.=10,94***

Taille : 045

N°	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
	RÉGRESSION PARABOLIQUE			
1.	Initialisation		XEQ ΣPOLYP	ΣPOLYP
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour			
	$i = 1, 2, ..., n$ introduire x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k	x_k	ENTER↑	
	et de y_k	y_k	C	(k−1)
4.	Calcul de R^2, a, b, c		E	R2=(R^2)
			R/S	a=(a)
			R/S	b=(b)
			R/S	c=(c)
5.	Calcul de y estimé ($\hat{y}$)			
	introduire x	x	R/S	Y.=($\hat{y}$)
6.	Reprendre 5 pour d'autres x			
7.	Pour rappeler les sommations effectuées au cours du calcul			
	Σx_i		RCL 32	(Σx_i)
	Σx_i^2		RCL 33	(Σx_i^2)
	Σx_i^3		RCL 34	(Σx_i^3)
	Σx_i^4		RCL 37	(Σx_i^4)
	Σy_i		RCL 41	(Σy_i)
	$\Sigma x_i y_i$		RCL 42	($\Sigma x_i y_i$)
	$\Sigma x_i^2 y_i$		RCL 43	($\Sigma x_i^2 y_i$)
8.	Revenir en 4 pour obtenir à nouveau les résultats			
9.	Pour un autre jeu de données puis aller en 2		■ A	ΣPOLYP

Exemple 2 :

Calculer la régression parabolique pour le jeu de données suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7
x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	12	34	50	75	84	128

L'équation est de la forme : $y = a + bx + cx^2$.

Solution :

$y = -4 + 6{,}64\ x + 1{,}64\ x^2$
$R^2 = 0{,}98$
Pour $x = 2$, $\hat{y} = 15{,}86$
Pour $x = 4$, $\hat{y} = 48{,}86$

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 045	
[XEQ] [ALPHA] ΣPOLYP [ALPHA]	ΣPOLYP
1 [ENTER↑] 5 [A]	
2 [ENTER↑] 12 [A]	
3 [ENTER↑] 34 [A]	
4 [ENTER↑] 50 [A]	
5 [ENTER↑] 75 [A]	
6 [ENTER↑] 84 [A]	
7 [ENTER↑] 128 [A]	*7,00*
[E]	*R2=0,98*
[R/S]	*a=−4,00*
[R/S]	*b=6,64*
[R/S]	*c=1,64*
2 [R/S]	*Y.=15,86*
4 [R/S]	*Y.=48,86*

TEST t

I. Test t sur des paires de variables

Soit une série d'observations prises deux par deux dans deux populations normales de moyennes inconnues μ_1 et μ_2.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Si

$$D_i = x_i - y_i$$

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$$

$$s_D = \sqrt{\frac{\Sigma D_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma D_i)^2}{n-1}}$$

Le test statistique qui a n-1 degrés de liberté (df) peut être utilisé pour tester l'hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.

$$t = \frac{\overline{D}}{s_D} \cdot \sqrt{n}$$

Référence :

Statistics in Research, B. Ostle, Iowa State University Press, 1963.

II. Test t sur deux moyennes

Supposons que $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$ soient deux échantillons pris au hasard dans deux populations normales de moyennes inconnues μ_1, μ_2, et de variances égales et inconnues σ^2.

Nous voulons tester l'hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d$.

Soit

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2 - n_1\bar{x}^2 + \Sigma y_i^2 - n_2\bar{y}^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

Pour tester l'hypothèse nulle H_0 on peut utiliser le test t de distribution t, avec $n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté.

Référence :

Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering, K. A. Brownlee, John Wiley et Sons, 1965.

				Taille : 015
N°	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
	TEST t SUR DES PAIRES			
1.	Initialisation		XEQ ΣPTST	ΣPTST
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1, 2, ..., n$ introduire x_i	x_i	ENTER↑	
	y_i	y_i	A	(i)
3.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k, y_k	x_k	ENTER↑	
		y_k	C	(k−1)
4.	Pour calculer les valeurs de	$\bar{D}$	E	DBAR=($\bar{D}$)
		s_D	R/S	SD=(s_D)
		t	R/S	T=(t)
		df	R/S	DF=(df)
5.	Revenir en 4 pour obtenir à nouveau les résultats			
6.	Pour un autre jeu de données puis aller en 2		■ A	ΣPTST
	TEST t SUR DEUX MOYENNES			
7.	Initialisation		XEQ ΣTSTAT	ΣTSTAT
8.	Répéter les pas 8 et 9 pour $i = 1, 2, ..., n_1$ introduire x_i	x_i	A	(i)
9.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de x_k	x_k	C	(k−1)
10.	Initialisation pour le 2ᵉ tableau de données		R/S	0.00
11.	Répéter les pas 11 et 12 pour $j = 1, 2, ..., n_2$ introduire y_j	y_j	A	(j)
12.	Pour corriger une erreur dans l'introduction de y_h	y_h	C	(h−1)
13.	Introduire d pour le calcul des valeurs de	d		
	t		E	T=(t)
	df		R/S	DF=(df)
14.	Répéter le pas 13 pour le calcul avec une valeur différente de d			
15.	Pour un autre jeu de données puis aller en 8		■ A	ΣTSTAT

Exemple 1

x_i	14	17.5	17	17.5	15.4
y_i	17	20.7	21.6	20.9	17.2

$\overline{D} = -3.20$

$s_D = 1.00$

$t = -7.16$

$df = 4.00$

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 015	
[XEQ] [ALPHA] ΣPTST [ALPHA]	*ΣPTST*
14 [ENTER↑] 17 [A]	
17.5 [ENTER↑] 20.7 [A]	
17 [ENTER↑] 21.6 [A]	
17 [ENTER↑] 15 [A]	
17 [ENTER↑] 15 [C]	
17.5 [ENTER↑] 20.9 [A]	
15.4 [ENTER↑] 17.2 [A]	*5,00*
[E]	*DBAR=−3,20*
[R/S]	*SD=1,00*
[R/S]	*T=−7,16*
[R/S]	*DF=4,00*

Exemple 2 :

x	79	84	108	114	120	103	122	120		
y	91	103	90	113	108	87	100	80	99	54

$n_1 = 8$

$n_2 = 10$

Si d $= 0$(i.e., H_0: $\mu_1 = \mu_2$)

Alors $t = 1.73$, $df = 16.00$

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 015	
[XEQ] [ALPHA] ΣTSTAT [ALPHA]	*ΣTSTAT*
79 [A] 84 [A]	
99 [A] 99 [C] 108 [A]	
114 [A] 120 [A]	
103 [A] 122 [A] 120 [A]	*8,00*
[R/S]	*0,00*
91 [A] 103 [A] 90 [A] 113 [A]	
108 [A] 87 [A] 100 [A] 80 [A]	
99 [A] 54 [A]	*10,00*
0 [E]	*T=1,73*
[R/S]	*DF=16,00*

CALCUL DE LA VALEUR DU CHI-CARRÉ

Ce programme calcule la valeur du CHI-CARRÉ pour vérifier le degré de perfection d'un ajustement par l'équation

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \text{ avec df} = n - 1$$

où O_i = fréquences observées
E_i = fréquences prévues
n = nombre de classes

Si les valeurs prévues sont égales

$$\left(E = E_i = \frac{\Sigma O_i}{n} \text{ pour tout i}\right)$$

alors

$$\chi_2^2 = \frac{n \Sigma O_i^2}{\Sigma O_i} - \Sigma O_i$$

Remarque :

Pour vérifier l'ajustement d'une série de données, on est parfois obligé de grouper certaines classes pour éviter que chaque fréquence prévue ne soit trop faible (par exemple, qu'elles ne soient pas inférieures à 5).

Référence :

Mathematical Statistics, J.-E. Freund, Prentice Hall, 1962.

Taille : 008

Pas	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
	FRÉQUENCES PRÉVUES INÉGALES			
1.	Initialisation		XEQ ΣXSQEV	ΣXSQEV
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1, 2, ..., n$	O_i	ENTER↑	
	Introduire O_i et E_i	E_i	A	(i)
3.	Pour corriger une erreur,	O_k	ENTER↑	
	introduire O_k et E_k	E_k	C	(k−1)
4.	Calcul de χ_1^2		E	XSQ=(χ_1^2)
5.	Pour utiliser le même programme avec un autre jeu de données, initialiser le programme puis aller en 2		A	ΣXSQEV
	FRÉQUENCES PRÉVUES ÉGALES			
6.	Initialisation		XEQ ΣEEFXSQ	ΣEEFXSQ
7.	Répéter les pas 7 et 8 pour $i = 1, 2, ... n$ introduire O_i	O_i	A	(i)
8.	Pour corriger une erreur, introduire O_h	O_h	C	(h−1)
9.	Calculer χ_2^2		E	XSQ=(χ_2^2)
	E		R/S	E=(E)
10.	Revenir en 9 pour obtenir à nouveau les résultats			
11.	Pour utiliser le même programme avec un autre jeu de données, initialiser le programme puis aller en 7		A	ΣEEFXSQ

Exemple 1 :

Calculer la valeur du χ^2 pour vérifier le degré de perfection de l'ajustement des valeurs suivantes :

O_i	8	50	47	56	5	14
E_i	9.6	46.75	51.85	54.4	8.25	9.15

$$\chi_1^2 = 4.84$$

Appuyer sur	Affichage
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 008	
XEQ ALPHA ΣXSQEV ALPHA	ΣXSQEV
8 ENTER↑ 9.6 A	
50 ENTER↑ 46.75 A	
47 ENTER↑ 51.85 A	
56 ENTER↑ 54.4 A	
5 ENTER↑ 8.25 A	
88 ENTER↑ 88 A	
88 ENTER↑ 88 C	
14 ENTER↑ 9.15 A	6,00
E	XSQ=4,84

Exemple 2 :

Un joueur lance un dé 120 fois (voir ci-dessous tableau des fréquences). χ^2 peut être utilisé pour tester si le dé est juste.

Remarque :

On suppose que les fréquences prévues sont égales.

résultats	1	2	3	4	5	6
fréquences O_i	25	17	15	23	24	16

$$\chi_2^2 = 5.00$$

$$E = 20.00$$

Appuyer sur	**Affichage**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 008	
XEQ ALPHA ΣEEFXSQ ALPHA	ΣEEFXSQ
25 A 17 A 15 A 22 A	
22 C	
23 A 24 A 16 A	6,00
E	XSQ=5,00
R/S	E=20,00

TABLEAUX DE CONTINGENCE

Les tableaux de contingence peuvent être utilisés pour tester l'hypothèse nulle : deux variables sont indépendantes.

Ce programme calcule le test du CHI-CARRÉ pour évaluer l'indépendance de deux variables. Le coefficient de contingence C_c de Pearson, qui mesure le degré d'association de deux variables, est également calculé.

Tableau de contingence 2 x k

i \ j	1	2	...	k	Totaux
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	R_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	R_2
Totaux	C_1	C_2	...	C_k	T

Tableau de contingence 3 x k

i \ j	1	2	...	k	Totaux
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	R_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	R_2
3	x_{31}	x_{32}	...	x_{3k}	R_3
Totaux	C_1	C_2	...	C_k	T

Équations :

$$\text{Somme des lignes } R_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2 \text{ (pour } 2 \times k) \\ i = 1, 2, 3 \text{ (pour } 3 \times k) \end{array}$$

$$\text{Somme des colonnes } C_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, k \\ n = 2 \text{ (pour } 2 \times k) \\ n = 3 \text{ (pour } 3 \times k) \end{array}$$

$$\text{Total } T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \qquad \begin{array}{l} n = 2 \text{ (pour } 2 \times k) \\ n = 3 \text{ (pour } 3 \times k) \end{array}$$

Test du CHI-CARRÉ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(x_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \text{avec df} = (n-1)(k-1)$$

$$= T \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{ij}^2}{R_i C_j} \right) - T \quad \begin{array}{l} n = 2 \text{ (pour } 2 \times k) \\ n = 3 \text{ (pour } 3 \times k) \end{array}$$

avec les fréquences espérées

Coefficient de contingence $C_c = \sqrt{\dfrac{\chi^2}{T + \chi^2}}$

Référence :

B. Ostle, *Statistics in Research*, Iowa State University Press, 1972.

				Taille : 16
Pas	**Instruction**	**Donnée**	**Fonction**	**Affichage**
	2xk			
1.	Initialisation		XEQ ΣCTKK	ΣCTKK
2.	Répéter les pas 2 à 5 pour $j = 1, 2, ..., k$ Introduire x_{1j}, x_{2j}	x_{1j} x_{2j}	ENTER↑ A	(j)
3.	(option) Calcul de la somme des colonnes		R/S	$CS=(C_j)$
4.	Pour corriger une erreur, introduire x_{1h}, x_{2h}	x_{1h} x_{2h}	ENTER↑ C	(h−1)
5.	(option) Pour corriger la somme des colonnes		R/S	$CS=(-C_h)$
6.	Pour le calcul de la table de contingence, aller en 12			
	3xk			
7.	Initialisation		XEQ ΣCTKKK	ΣCTKKK
8.	Répéter les pas 8 à 11 pour $j = 1, 2, ..., k$ Introduire x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}	x_{1j} x_{2j} x_{3j}	ENTER↑ ENTER↑ A	(j)
9.	(option) Calcul de la somme des colonnes		R/S	$CS=(C_j)$
10.	Pour corriger une erreur, introduire x_{1h}, x_{2h} et x_{3h}	x_{1h} x_{2h} x_{3h}	ENTER↑ ENTER↑ C	(h−1)

Pas	Instruction	Donnée	Fonction	Affichage
11.	(option) Pour corriger la somme des colonnes		R/S	$CS=(-C_h)$
12.	Calcul test statistique χ^2 Coefficient C_c Somme du rang 1 (R_1) Somme du rang 2 (R_2) Somme du rang 3 (R_3) 3xk seulement Total T		 E R/S R/S R/S R/S R/S	 $XSQ=(\chi^2)$ $CC=(C_c)$ $R1=(R_1)$ $R2=(R_2)$ $R3=(R_3)$ T=(T)
13.	Revenir au pas 12 si vous voulez à nouveau les résultats			
14.	Pour utiliser le même programme avec un autre jeu de données, initialisation		■ A	ΣCTKK or ΣCTKKK
15.	Pour utiliser un autre programme, aller en 1 ou en 7			

Exemple 1 :

Calculer la valeur du test χ^2 et du coefficient de contingence C_c pour les données suivantes.

	1	2	3
A	2	5	4
B	3	8	7

Appuyer sur	**Affichage**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 015	
XEQ ALPHA ΣCTKK ALPHA	*ΣCTKK*
2 ENTER↑ 3 A	*1,00*
R/S	*CS=5,00*
5 ENTER↑ 8 A 4 ENTER↑ 7 A	*3,00*
E	*XSQ=0,02*
R/S	*CC=0,03*
R/S	*R1=11,00*
R/S	*R2=18,00*
R/S	*T=29,00*

Exemple 2.

Calculer la valeur du test χ^2 et du coefficient de contingence C_c pour les données suivantes.

i \ j	1	2	3	4
1	36	67	49	58
2	31	60	49	54
3	58	87	80	68

Appuyer sur	Affichage
[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 015	
[XEQ] [ALPHA] ΣCTKKK [ALPHA]	*ΣCTKKK*
36 [ENTER↑] 31 [ENTER↑] 58 [A]	*1,00*
[R/S]	*CS=125,00*
67 [ENTER↑] 60 [ENTER↑] 87 [A]	
4 [ENTER↑] 49 [ENTER↑] 80 [A]	
4 [ENTER↑] 49 [ENTER↑] 80 [C]	
49 [ENTER↑] 49 [ENTER↑] 80 [A]	
58 [ENTER↑] 54 [ENTER↑] 68 [A]	*4,00*
[E]	*XSQ=3,36*
[R/S]	*CC=0,07*
[R/S]	*R1=210,00*
[R/S]	*R2=194,00*
[R/S]	*R3=293,00*
[R/S]	*T=697,00*

Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Le coefficient de corrélation des rangs de Spearman est une mesure de la corrélation entre deux classements : deux observateurs ont attribué à n individus un rang 1 à n, à partir d'un certain critère. On désire savoir si les deux classements s'accordent très bien l'un avec l'autre.

Le coefficient de corrélation des rangs de Spearman est défini par

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

avec n = nombre de données de couples (x_i, y_i)
$D_i = \text{rang}(x_i) - \text{rang}(y_i) = R_i - S_i$

Si les variables aléatoires x et y correspondant à ces n paires d'observations sont indépendantes, nous avons pour r_s une moyenne nulle et une variance

$$\frac{1}{n - 1}$$

On peut tester alors l'hypothèse nulle H_0 : x, y sont indépendants en utilisant

$$z = r_s \sqrt{n - 1}$$

qui est approximativement une variable distribuée suivant une loi normale (pour n grand, par exemple $n \geqslant 10$).

Si l'hypothèse nulle d'indépendance n'est pas rejetée, on peut déduire que le coefficient de corrélation $\rho(x, y) = 0$, mais la dépendance entre les variables n'implique pas nécessairement que $\rho(x, y) \neq 0$.

Remarque :

$-1 \leqslant r_s \leqslant 1$

$r_s = 1$ indique que les deux séries de rangs sont identiques et $r_s = -1$ indique que les deux séries de rangs sont exactement inverses.

Référence :

Nonparametric Statistical Inference, J. D. Gibbons, McGraw Hill, 1971.

				Taille : 003
Pas	Instruction	Données	Fonction	Affichage
1.	Initialisation		XEQ ΣSPEAR	ΣSPEAR
2.	Répéter les pas 2 et 3 pour $i = 1, 2, ..., n$ Introduire R_i et S_i	R_i S_i	ENTER↑ A	 (i)
3.	Pour corriger une erreur, introduire R_k et S_k	R_k S_k	ENTER↑ C	 (k−1)
4.	Calculer r_s Z		E R/S	RS=(r_s) Z=(z)
5.	Revenir en 4 pour obtenir à nouveau les résultats			
6.	Pour un autre jeu de données, initialisation puis aller en 2		■ A	ΣSPEAR

Exemple :

Les données suivantes sont les résultats de deux examens, pour une classe. Calculer r_s et z.

Étudiant	x_i Note en mathématiques	y_i Note en statistiques	R_i Rang de x_i	S_i Rang de y_i
1	82	81	6	7
2	67	75	14	11
3	91	85	3	4
4	98	90	1	2
5	74	80	11	8
6	52	60	15	15
7	86	94	4	1
8	95	78	2	9
9	79	83	9	6
10	78	76	10	10
11	84	84	5	5
12	80	69	8	13
13	69	72	13	12
14	81	88	7	3
15	73	61	12	14

Appuyer sur	Affichage
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 003	
XEQ ALPHA ΣSPEAR ALPHA	ΣSPEAR
6 ENTER↑ 7 A	
14 ENTER↑ 11 A	
3 ENTER↑ 4 A	
1 ENTER↑ 2 A	
11 ENTER↑ 8 A	
5 ENTER↑ 5 A	
5 ENTER↑ 5 C	
15 ENTER↑ 15 A	
4 ENTER↑ 1 A	
2 ENTER↑ 9 A	
9 ENTER↑ 6 A	
10 ENTER↑ 10 A	
5 ENTER↑ 5 A	
8 ENTER↑ 13 A	
13 ENTER↑ 12 A	
7 ENTER↑ 3 A	
12 ENTER↑ 14 A	15,00
E	RS=0,76
R/S	Z=2,85

Notes

Distribution normale et normale inverse

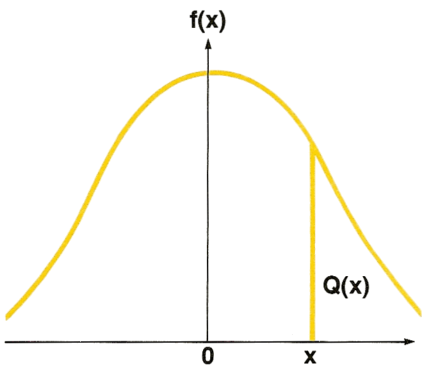
Ce programme calcule la densité d'une distribution normale, f(x), et sa fonction de répartition Q(x), pour x donné. Si Q est donné, x peut être calculé.

Une distribution normale a une moyenne de 0 et un écart-type de 1.

Équations :

1. Densité normale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



2. Fonction de répartition

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Pour un x donné, le programme calcule Q(x) par la formule d'approximation polynômiale.

Soit $R = f(x)\,(b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4 + b_5t^5) + \varepsilon(x)$
avec $\{\varepsilon(x)\} < 7{,}5 \times 10^{-8}$

$$t = \frac{1}{1 + r\,|x|}, \qquad r = 0.2316419$$

$$b_1 = .319381530, \qquad b_2 = -.356563782$$
$$b_3 = 1.781477937, \qquad b_4 = -1.821255978$$
$$b_5 = 1.330274429$$

$$\text{Alors } Q(x) = \begin{cases} R & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - R & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec erreur } |\varepsilon(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$$

3. Normale inverse

Pour Q donné, $O < Q < 1$, x peut être calculé sachant que

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Il est possible d'utiliser l'approximation suivante :

$$\text{Soit } y = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} + \epsilon(Q)$$

avec $|\epsilon(Q)| < 4.5 \times 10^{-4}$

$$t = \begin{cases} \sqrt{\ln \dfrac{1}{Q^2}} & \text{si } 0 < Q \leqslant 0.5 \\ \sqrt{\ln \dfrac{1}{(1-Q)^2}} & \text{si } 0.5 < Q < 1 \end{cases}$$

$$c_0 = 2.515517 \qquad d_1 = 1.432788$$
$$c_1 = 0.802853 \qquad d_2 = 0.189269$$
$$c_2 = 0.010328 \qquad d_3 = 0.001308$$

$$\text{Alors } x = \begin{cases} y & \text{si } 0 < Q \leqslant 0.5 \\ -y & \text{si } 0.5 < Q < 1 \end{cases} \quad \text{avec erreur } |\varepsilon(Q)| < 4.5 \times 10^{-4}$$

Référence :

Abramowitz et Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1970.

				Taille : 019
Pas	**Instruction**	**Donnée**	**Fonction**	**Affichage**
1.	Initialisation		XEQ ΣNORMD	ΣNORMD
2.	Introduire x pour calculer f(x)	x	C	F=(f(x))
3.	Introduire x pour calculer Q(x)	x	E	Q=(Q(x))
4.	Introduire Q(x) pour calculer x	Q(x)	A	X=(x)
5.	Reprendre l'un des pas ci-dessus si nécessaire			

Exemple 1 :

Calculer f(x) et Q(x) pour x = 1,18 et x = – 2,28.

Appuyer sur	**Affichage**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 019	
XEQ ALPHA ΣNORMD ALPHA	ΣNORMD
1.18 C	F=0,20
1.18 E	Q=0,12
2.28 CHS E	Q=0,99
2.28 CHS C	F=0,03

Exemple 2 :

Pour Q = 0,12 et Q = 0,95, calculer x.

(Si l'exemple 1 vient d'être exécuté, procéder comme ci-dessous ; autrement charger préalablement les programmes comme il est dit dans l'exemple 1.)

Appuyer sur	**Affichage**
0.12 A	X=1,18
0.95 A	X=–1,65

Notes

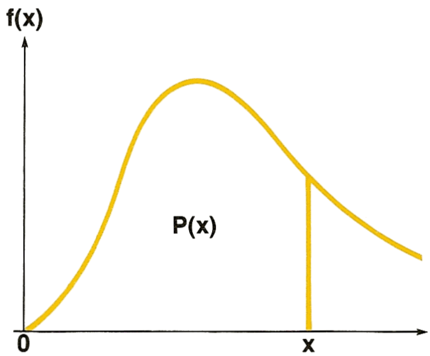
Distribution du chi-carré

Ce programme calcule la densité du chi-carré

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\, x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

avec $x \geqslant 0$

ν représente le nombre de degrés de liberté



La fonction de répartition est obtenue par un développement en série

$$P(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(\nu+2)(\nu+4)\ldots(\nu+2k)}\right]$$

Le programme calcule les sommes partielles successives de cette série. Quand deux sommes partielles consécutives sont égales, cette valeur est alors assimilée à la somme de la série.

Remarques :

1. Le programme exige : $\nu < 141$. Si $\nu > 141$, les réponses seront fausses par dépassement de capacité.

2. Si à la fois x rt ν sont grands, f(x) peut dépasser la capacité de la machine.

3. Si ν est pair

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)!$$

Si ν est impair

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\left(\frac{\nu}{2} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Référence :

Abramowitz et Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1970.

N°	Instructions	Donnée	Fonctions	Affichage
				Taille : 007
1.	Initialisation		XEQ ΣCHISQD	ΣCHISQD
2.	Introduction du nombre de degrés de liberté ν	ν	A	$(\Gamma(\nu/2))$
3.	Introduire x pour calculer f(x)	x	C	F=(f(x))
4.	Introduire x pour calculer P(x)	x	E	P=(P(x))
5.	Revenir en 3 ou en 4 pour le même ν			
6.	Pour un ν différent, aller en 2			

Exemples :

Si il y a ν = 20 degrés de liberté, calculer f(x), P(x) pour x = 9,6 et x = 15.
Si ν = 3, calculer f(x) et P(x) pour x = 7,82.

Appuyer sur	**Affichage**
XEQ ALPHA SIZE ALPHA 007	
XEQ ALPHA ΣCHISQD ALPHA	ΣCHISQD
20 A	362880,00
9.6 C	F=0,02
9.6 E	P=0,03
15 E	P=0,22
15 C	F=0,06
3 A	0,89
7.82 C	F=0,02
7.82 E	P=0,95

Notes

ANNEXE A

DONNÉES SUR LES PROGRAMMES

PROGRAMMES	≠ REGISTRES A COPIER	REGISTRES DE DONNÉES	INDICATEURS BINAIRES	FORMAT D'AFFICHAGE
1. Statistiques fondamentales sur deux variables	50	00 ~ 11	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
2. Moments, asymétrie et aplatissement	36	00 ~ 11	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
3. Analyse de variance sur une variable	29	00 ~ 19	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
4. Analyse de variance sur deux variables sans duplication	33	00 ~ 17	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
5. Analyse de covariance (une variable)	60	00 ~ 25	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
6. Ajustement de courbe	34	00 ~ 15	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
7. Régression linéaire multiple	102	00 ~ 44	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
8. Régression polynômiale	102	00 ~ 44	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
9. Tests statistiques	29	00 ~ 14	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
10. Évaluation du CHI-CARRÉ	21	00 ~ 07	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
11. Tableau de contingence	33	00 ~ 14	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
12. Coefficient de corrélation des rangs de Spearman	13	00 ~ 02	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIx 2
13. Distribution normale et normale inverse	47	00 ~ 18	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2
14. Distribution du CHI-CARRÉ	21	00 ~ 06	00 ~ 03, 21, 27, 29	FIX 2

HEWLETT
PACKARD

Référence du manuel : 00041-90032 Imprimé aux U. S. A. - Décembre 1979