HEWLETT-PACKARD

HP-25

Programación aplicada

Las informaciones de programación que contiene este libro se suministran sin ninguna clase de garantía ni el deseo de ejercer influencia sobre ninguna opinión. Por lo tanto, Hewlett-Packard Company no asume ninguna responsabilidad ni acepta ninguna obligación, directa o indirecta, por el uso total o parcial de dichas informaciones.

Printed in Singapore.

HEWLETT-PACKARD

HP-25

Programación aplicada

INTRODUCCION

Este libro tiene por objeto familiarizar al lector con la técnica de programación aplicada a la notable calculadora electrónica de bolsillo HP-25, creada y producida por Hewlett-Packard. La programación es una rama de la informática que no hace más de diez años sólo estaba al alcance de quienes tenían acceso a grandes computadoras u ordenadoras que costaban cientos de miles de dólares. Hace apenas cinco años, para solucionar problemas mediante programación era necesario emplear voluminosas y carísimas calculadoras de escritorio. En cambio hoy la HP-25, que cabe cómodamente en la mano, pone los beneficios de la programación al alcance de todos. La lectura de este libro dará una idea de la inmensa capacidad de cálculo de este valioso instrumento.

Los programas de aplicación práctica que el lector encontrará en los ocho capítulos siguientes se han estructurado en base a problemas de matemáticas, estadística, finanzas, topografía, navegación y juegos de entretenimiento. En cada programa se suministra la siguiente información: una explicación detallada del planteamiento del problema; las ecuaciones pertinentes; una lista de las teclas de funciones a ingresarse en la memoria de programación; las instrucciones de ejecución y uno o dos ejemplos con las soluciones respectivas. No se necesita tener preparación previa para utilizar los programas, pero se supone que el lector se ha familiarizado con el Manual de Instrucciones de la HP-25.

Para las personas que deseen profundizar sus conocimientos en los principios y métodos de programación, se han incluido varios programas especiales. El primer programa de cada capítulo contiene, además de las explicaciones usuales, (a) una descripción más detallada del problema; (b) una lista comentada de las pulsaciones de teclas necesarias para el programa, con indicación de los cambios consecutivos del contenido de los registros de la escala operativa y (c) una lista de las pulsaciones de las teclas necesarias para resolver el problema dado como ejemplo. Cuando se ha usado un método de programación especial en uno de estos programas, dicho método se describe en una breve sección titulada *Comentarios de programación*.

Ya sea que el lector se interese en cálculos matemáticos de naturaleza específica o en conocer más a fondo la capacidad de programación de la HP-25, confiamos que este libro le permitirá obtener el mayor provecho posible de la calculadora.

INDICE GENERAL

DOS PALABRAS SOBRE EL USO DE PROGRAMAS

Este libro contiene numerosas informaciones destinadas a explicar claramente el uso de cada uno de los programas incluidos para solucionar problemas determinados. Se comienza con una breve descripción del problema, seguida de una lista de las ecuaciones necesarias y un problema de ejemplo con su respectiva solución. Además se explica el uso de dos formularios de trabajo, uno de programación y otro de instrucciones (véanse muestras al final del libro).

En realidad hay dos clases de formularios de programación, uno detallado y otro abreviado. El formulario detallado se usa en un total de ocho programas, uno por cada capítulo. El formulario abreviado se ha usado en los demás programas. A continuación se ilustra parte de un formulario detallado que corresponde a una sección del programa de representación gráfica del Capítulo I.

PANTALLA LINEA	CLAVE	INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES	REGISTROS
00			v	θ				R_0 Δt
01	14 09	f →R	v_x	v_y			Polares a cartesianas para	
02	23 02	STO 2	v_x	v_y			$Vx = V \cos \theta =$ veloc.	
03	21	$x \rightleftarrows y$	v_y	v_x			horiz.	R_1 g
04	23 03	STO 3	v_y	v_x			$Vy = V \operatorname{sen} \theta =$ veloc.	
05	00	0	0				vertic.	
06	23 04	STO 4	0				Fijar en: $t = 0$	R_2 v_x
07	24 00	RCL 0	Δt				Comienzo de iteración	
08	23 51 04	STO + 4	Δt				Intervalo siguiente:	
09	24 04	RCL 4	t				$t \leftarrow t + \Delta t$	R_3 v_y
10	15 02	g x^2	t^2					

La columna de la extrema derecha del formulario, o sea REGISTROS, muestra los valores variables que se almacenan en los registros R_0 hasta R_7. El resto del formulario se divide en ocho columnas; las dos primeras señalan los datos que deben aparecer en la pantalla a medida que se ingresa el programa. En la columna titulada LINEA se menciona el número del paso de instrucción de pulsación, mientras que en la columna CLAVE se dan las claves numéricas correspondientes a las teclas que deben pulsarse de acuerdo con las instrucciones de la columna siguiente, INGRESO DE TECLAS. Estas son las teclas que deben pulsarse para ingresar el programa en la memoria. La tecla ENTER↑ se designa en dicha columna con ↑ ; todas las demás designaciones son idénticas a las que aparecen en el teclado de la calculadora.

Las cuatro columnas siguientes, denominadas X, Y, Z y T, indican los cambios que se producen en el contenido de la escala durante la ejecución del programa. Cada ingreso en X, Y, Z o T indica el contenido del registro respectivo después de ejecutarse la instrucción de la línea correspondiente. La columna de COMENTARIOS contiene mayores explicaciones, paso a paso, de los cálculos del programa. Estas últimas columnas –X, Y, Z, T y COMENTARIOS– sirven para que el operador adquiera un conocimiento más profundo y detallado de la estructuración de un programa en particular o de las técnicas de programación en general.

El formulario de programación simplificado contiene la misma información que el modelo detallado, excepto que se omiten las columnas X, Y, Z, T y COMENTARIOS.

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene el intervalo	Δt	STO	0			
3	Almacene constante gravit.	g	STO	1			
4	Ingrese ángulo y vel. inicial	θ	↑				
		v	f	PRGM			
5	Ejecute pasos 5 y 6 todas las						
	veces necesarias. Presente		R/S				(t)
	tiempo y distancia horizontal						x
6	Presente altura		R/S				y
7	Para cambiar θ o v, vaya a 4						
	Para cambiar Δt o g, vaya al						
	paso apropiado, almacene						
	el nuevo valor y vuelva a 4						

El formulario de instrucciones sirve de guía para que el operador ejecute sus propios programas de problemas particulares. Este formulario, que se compone de cinco columnas, se ilustra en la página siguiente con el ejemplo del mismo programa de representación gráfica ya mencionado. La columna de PASO da el número de paso de una instrucción. La columna de instrucciones contiene las instrucciones y los comentarios relativos a las operaciones en ejecución. Los pasos se ejecutan en orden consecutivo, excepto cuando se da otra instrucción.

Normalmente, la primera instrucción es "Ingrese el programa", que significa almacenar las pulsaciones de teclas en la memoria de programación. Se coloca el selector de funcionamiento en programación (PRGM), se pulsa f PRGM , se ingresa el programa y se vuelve el selector a la posición de ejecución (RUN).

Los procesos repetitivos, que se utilizan generalmente en las largas listas de datos de entrada o salida, se muestran dentro de un cuadro de línea gruesa como en los pasos 5 y 6 del ejemplo. En este caso, los pasos se repiten todas las veces necesarias con el fin de generar un número de pares (x, y) destinados a un gráfico.

En la columna de DATOS DE ENTRADA se especifican los datos que deben suministrarse y las unidades de los datos necesarios. En la columna de TECLAS se especifican las teclas que deben pulsarse. Se usa ↑ para indicar la tecla ENTER↑ , pero todas las demás designaciones de teclas son idénticas a las que aparecen en la HP-25. Las posiciones en blanco de la columna de TECLAS se pasan por alto.

Algunos programas son tan complejos que el operador debe pulsar teclas adicionales para obtener los resultados. Tales teclas se indican también en la columna de TECLAS. La columna de DATOS DE SALIDA muestra los resultados intermedios y finales de los cálculos hechos ya sea manualmente desde el teclado o mediante un programa. Los paréntesis en las variables de salida, como en (t) del paso 5, indican que el resultado se presenta brevemente pulsando una instrucción de PAUSA (f PAUSE).

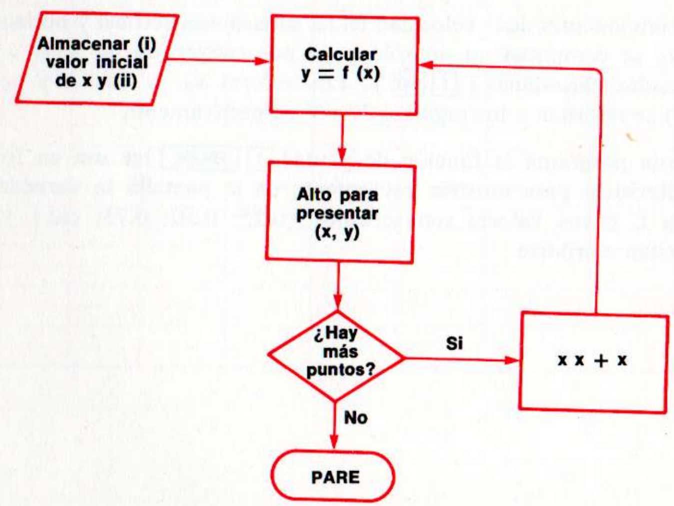
CAPITULO I

ALGEBRA Y TEORIA DE LOS NUMEROS

REPRESENTACION GRAFICA

La graficación o representación gráfica de valores generalmente resulta desagradable a quienes han pasado por los cursos de álgebra en la escuela.
Es evidente que deja un mal recuerdo la tediosa tarea de encontrar, por ejemplo, los datos correspondientes a $y = 3x^2 - 4x + 4$ para valores enteros de x con límites $-\infty$ a $+\infty$. Afortunadamente ahora no es necesario efectuar estos fatigosos cálculos a mano, porque la HP-25 se presta admirablemente para este tipo de cálculos repetitivos.

El procedimiento fundamental consiste en generar pares de números (x, y) ingresando en la memoria de programación las pulsaciones de las teclas necesarias para calcular y, cuando el valor de x es conocido. A continuación el operador se limita a la sencilla tarea de volver a la parte superior de la memoria, donde ingresa un valor para x. Luego pulsa la tecla $\boxed{\text{R/S}}$ y en pocos segundos el valor de y se presenta en la pantalla. El proceso puede repetirse con cuantos valores de x sea necesario. El programador incluso puede automatizar el proceso un paso más, haciendo que la calculadora genere cada nuevo valor x (por ejemplo sumando 1 al valor anterior) o bien sumando un incremento especificado Δx. A continuación se presenta un diagrama de flujo para generar la secuencia de valores deseados.



El programa que se ha usado como ilustración difiere algo de esta explicación. Se considerará a continuación el problema de graficar la trayectoria de una piedra lanzada al aire con velocidad inicial v y con ángulo θ con respecto al horizonte. Si se ignora la fricción del roce con la atmósfera, las coordenadas x e y de la piedra – como funciones del tiempo t – pueden expresarse con estas ecuaciones:

$$x = vt \cos \Theta \qquad\qquad y = vt \operatorname{sen} \Theta - \frac{1}{2} gt^2$$

donde x = distancia horizontal recorrida por la piedra.
g = aceleración impresa por la fuerza de gravedad.
y = altura de la trayectoria de la piedra.

$\simeq 9{,}8\ m/s^2$

$\simeq 32\ ft/s^2$

Estas ecuaciones difieren ligeramente de las funciones de los gráficos corrientes, ya que y no se expresa directamente como función de x, sino que ambas, x e y, se expresan en función de una tercera variable t. Pero los puntos a graficarse siguen siendo los pares ordenados (x, y), siendo en este caso t la variable a incrementarse en una cantidad $\triangle t$.

Observaciones:

1. Puede usarse cualquier serie uniforme de unidades.
2. Este no es un programa de graficación de validez general; sólo sirve para ilustrar la aplicación de un método determinado a un problema específico. Sin embargo, el estudio de la lista del programa y el diagrama de flujo permitirán adaptar este método a la aplicación que se desee.

Observaciones de programación:

1. Los componentes de la velocidad en las direcciones vertical y horizontal v_x, v_y se computan en un sólo paso por conversión de v, Θ a coordenadas cartesianas (f ⇥R). Los valores $v_x = \cos \Theta$ y $v_y = \text{sen}\ \Theta$ se retornan a los registros X e Y respectivamente.
2. En este programa la función de pausa(f PAUSE)se usa en forma característica para mostrar brevemente en la pantalla la variable de salida t, cuyos valores son sencillos (0,25; 0,50; 0,75; etc.) y no necesitan escribirse.

PANTALLA		INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
LINEA	CLAVE						
00			v	θ			
01	14 09	f →R	v_x	v_y			Polares a cartesianas para
02	23 02	STO 2	v_x	v_y			Vx = V cos Θ = veloc. horiz
03	21	x⇄y	v_y	v_x			
04	23 03	STO 3	v_y	v_x			Vy = V sen Θ = veloc. vertic.
05	00	0	0				
06	23 04	STO 4	0				Fijar en: $t = 0$
07	24 00	RCL 0	Δt				Comienzo de iteración
08	23 51 04	STO + 4	Δt				Intervalo siguiente:
09	24 04	RCL 4	t				$t \leftarrow t + \Delta t$
10	15 02	g x^2	t^2				
11	24 01	RCL 1	g	t^2			
12	61	×	$g t^2$				
13	02	2	2	$g t^2$			
14	71	÷	$1/2\, g t^2$				
15	32	CHS	$-1/2\, g t^2$				
16	24 04	RCL 4	t	$-1/2\, g t^2$			
17	24 03	RCL 3	v_y	t	$-1/2\, g t^2$		
18	61	×	$v_y t$	$-1/2\, g t^2$			
19	51	+	y				$y = v_y t - 1/2\, g t^2$
20	24 04	RCL 4	t	y			
21	24 02	RCL 2	v_x	t	y		
22	61	×	x	y			$x = v_x t$
23	24 04	RCL 4	t	x	y		
24	14 74	f PAUSE	t	x	y		Pausa para presentar t
25	22	R↓	x	y		t	
26	74	R/S	x	y		t	Para y presenta x
27	21	x⇄y	y	x		t	
28	74	R/S	y	x		t	Para y presenta y
29	13 07	GTO 07	y	x		t	Vuelve para t siguiente
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTROS	
R_0	Δt
R_1	g
R_2	v_x
R_3	v_y
R_4	t
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene el intervalo	Δt	STO	0			
3	Almacene constante gravit.	g	STO	1			
4	Ingrese ángulo y vel. inicial	θ	↑				
		v	f	PRGM			
5	Ejecute pasos 5 y 6 todas las						
	veces necesarias. Presente		R/S				(t)
	tiempo y distancia horizontal						x
6	Presente altura		R/S				y
7	Para cambiar θ o v, vaya a 4						
	Para cambiar Δt o g, vaya al						
	paso apropiado, almacene						
	el nuevo valor y vuelva a 4						

Ejemplo:

Trazar el gráfico de la trayectoria de una piedra lanzada con una velocidad de 20 m/s y un ángulo de 30° con respecto al horizonte. Usar intervalos de 1/4 de segundo entre los puntos del gráfico. La aceleración de gravedad es $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Solución:

0.25 STO 0 9.8 STO 1 30 ↑ 20 f PRGM R/S ⟶ 0,25 (t_1)
4,33 (x_1)

R/S ⟶ 2,19 (y_1)

R/S ⟶ 0,5 (t_2)
8,66 (x_2)

R/S ⟶ 3,78 (y_2)

R/S ⟶ 0,75 (t_3)
12,99 (x_3)

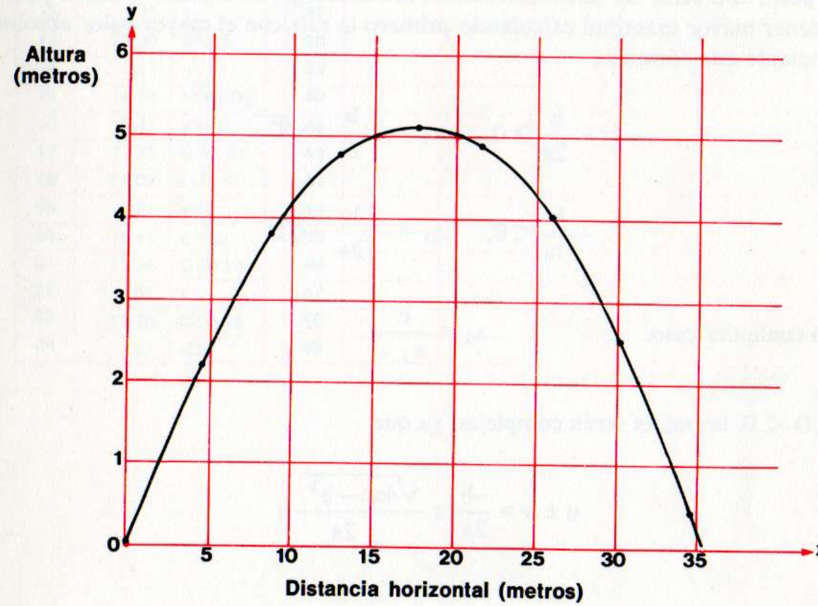
R/S ⟶ 4,74 (y_3)

etc.

Se continúa hasta que y se convierte en valor negativo. La tabla con los valores respectivos se muestra a continuación:

t	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25
x	4,33	8,66	12,99	17,32	21,65	25,98	30,31	34,64	38,97
y	2,19	3,78	4,74	5,10	4,84	3,98	2,49	0,40	–2,31

La representación gráfica de estos valores (x, y) revela la trayectoria parabólica de la piedra.



ECUACION CUADRATICA

Las raíces x_1, x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$

se encuentran con la ecuación: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $D = (b^2 - 4ac)/4a^2$

es positivo o cero, las raíces son reales. Sin embargo, en algunos casos es posible obtener mayor exactitud calculando primero la raíz con el mayor valor absoluto, mediante esta fórmula:

Si $-\dfrac{b}{2a} \geqslant 0, \quad x_1 = -\dfrac{b}{2a} + \sqrt{D}$

Si $-\dfrac{b}{2a} < 0, \quad x_1 = -\dfrac{b}{2a} - \sqrt{D}$

En cualquier caso, $x_2 = \dfrac{c}{x_1\ a}$.

Si D < 0, las raíces serán complejas, ya que

$$u \pm iv = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i$$

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	31	↑
02	22	R↓
03	71	÷
04	02	2
05	71	÷
06	32	CHS
07	31	↑
08	15 02	g x^2
09	22	R↓
10	22	R↓
11	21	x⇄y
12	71	÷
13	23 00	STO 0
14	41	–
15	14 74	f PAUSE
16	15 41	g x<0
17	13 31	GTO 31
18	14 02	f $\sqrt{x}$
19	21	x⇄y
20	15 41	g x<0
21	13 24	GTO 24
22	51	+
23	13 26	GTO 26
24	21	x⇄y

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25	41	–
26	74	R/S
27	15 22	g 1/x
28	24 00	RCL 0
29	61	x
30	13 00	GTO 00
31	32	CHS
32	14 02	f $\sqrt{x}$
33	21	x⇄y
34	74	R/S
35	21	x⇄y
36	13 00	GTO 00
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 c/a
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	PRGM			
3	Ingrese coefs. y presente D	c	↑				
		b	↑				
		a	R/S				(D)
4	Si D ≥ O, las raíces son reales						x_1
			R/S				x_2
	o						
	Si D < O, las raíces son						
	complejas de forma u ± iv						u
			R/S				v
5	Para un nuevo caso, vuelva a 3						

Ejemplo:

Encontrar soluciones a las tres ecuaciones que se dan a continuación:

1. $x^2 + x - 6 = 0$
2. $3x^2 + 2x - 1 = 0$
3. $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Soluciones:

1. $D = 6{,}25$

   $x_1 = -3{,}00$

   $x_2 = 2.00$

2. $D = 0{,}44$

   $x_1 = -1{,}00$

   $x_2 = 0{,}33$

3. $D = -1{,}94$

   $x_1, x_2 = 0{,}75 \pm 1{,}39\ i$

ARITMETICA COMPLEJA: +, −, ×, ÷

Si $a_1 + ib_1$ y $a_2 + ib_2$ son dos números complejos, las operaciones aritméticas entre ellos se definen así:

1. +, suma:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

2. −, resta:

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

3. ×, multiplicación:

$$(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = r_1\ r_2\ e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

4. ÷, división:

$$\frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i(\theta_1 - \theta_2)},\ a_2 + ib_2 \neq 0$$

donde $r_1\ e^{i\theta_1}$ es la representación polar de $a_1 + ib_1$ y $r_2\ e^{i\theta_2}$ es la representación polar de $a_2 + ib_2$. En cada caso el resultado será $x + iy$.

Después de terminar el cálculo, x se almacena en R_0 así como en el registro X, e y en el registro R_1, así como en el registro Y. De esta manera se pueden encadenar las operaciones aritméticas.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	32	CHS
02	21	x⇄y
03	32	CHS
04	21	x⇄y
05	24 00	RCL 0
06	51	+
07	21	x⇄y
08	24 01	RCL 1
09	51	+
10	13 31	GTO 31
11	15 09	g →P
12	15 22	g 1/x
13	21	x⇄y
14	32	CHS
15	21	x⇄y
16	13 18	GTO 18
17	15 09	g →P
18	24 02	STO 2
19	22	R↓
20	24 01	RCL 1
21	24 00	RCL 0
22	15 09	g →P
23	24 02	RCL 2
24	61	x

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	23 02	STO 2
26	22	R↓
27	51	+
28	24 02	RCL 2
29	14 09	f →R
30	21	x⇄y
31	23 01	STO 1
32	21	x⇄y
33	23 00	STO 0
34	13 00	GTO 00
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 a_1 , x
R_1 b_1 , y
R_2 Empleado
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene primer No. complejo	b_1	STO	1			
		a_1	STO	0			
3	Ingrese el número siguiente	b_2	↑				
		a_2					
4	Para suma		GTO	05	R/S		x
	o						
	resta		f	PRGM	R/S		x
	o						
	multiplicación		GTO	17	R/S		x
	o						
	división		GTO	11	R/S		x
5	Para la parte imaginaria		x⇄y				y
6	Para el siguiente cálculo en						
	cadena, regrese al paso 3						
7	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplos:

1. $(1{,}2 + 3{,}7i) - (2{,}6 - 1{,}9i) = -1{,}4 + 5{,}6i$

2. $\dfrac{3 + 4i}{7 - 2i} = 0{,}25 + 0{,}64i$

3. $\left[\dfrac{(3 + 4i) + (7{,}4 - 5{,}6i)}{(7 - 2i)}\right] [3{,}1 + 4{,}6i] = 3{,}61 + 7{,}16i$

FUNCIONES COMPLEJAS $|z|, z^2, {}^1/z, \sqrt{z}$

Un número complejo $z = a + ib$ tiene una representación polar $re^{i\theta}$. Las funciones dadas se calculan mediante las siguientes fórmulas:

1. $|z| = r$
2. $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$
3. ${}^1/z = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta}, z \neq 0$
4. $\sqrt{z} = \pm (\sqrt{r}\ e^{i\theta/2}) = \pm (x + iy)$

El resultado se representa como $x + iy$.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	15 09	g →P
02	13 00	GTO 00
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	21	x⇄y
06	31	↑
07	51	+
08	21	x⇄y
09	14 09	f →R
10	13 00	GTO 00
11	15 09	g →P
12	15 22	g 1/x
13	21	x⇄y
14	32	CHS
15	21	x⇄y
16	14 09	f →R
17	13 00	GTO 00
18	15 09	g →P
19	14 02	f $\sqrt{x}$
20	21	x⇄y
21	02	2
22	71	÷
23	21	x⇄y
24	14 09	f →R

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	13 00	GTO 00
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese z	b	↑				
		a					
3	Para $|z|$		f	PRGM	R/S		$|z|$
	o						
	z^2		GTO	03	R/S		x
			x⇄y				y
	o						
	1/z		GTO	11	R/S		x
			x⇄y				y
	o						
	$\sqrt{z}$		GTO	18	R/S		x
			x⇄y				y
4	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplos:

1. $|12 - 5i| = 13{,}00$
2. $(6 - i)^2 = 35{,}00 - 12{,}00i$
3. $\dfrac{1}{2 + 5i} = 0{,}07 - 0{,}17i$
4. $\sqrt{3 + 4i} = \pm (2{,}00 + 1{,}00i)$

DETERMINANTE E INVERSA DE UNA MATRIZ 2 x 2

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tenemos una matriz 2 x 2.

La determinante de A denotada por Det A o |A| se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$\text{Det } A = a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21}$$

El programa también calcula la inversa multiplicativa A^{-1} de A, para lo cual se usa la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/\text{Det } A & -a_{12}/\text{Det } A \\ -a_{21}/\text{Det } A & a_{11}/\text{Det } A \end{bmatrix}$$

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	24 04	RCL 4
02	24 01	RCL 1
03	61	x
04	24 02	RCL 2
05	24 03	RCL 3
06	61	x
07	41	–
08	23 00	STO 0
09	74	R/S
10	24 04	RCL 4
11	24 00	RCL 0
12	71	÷
13	74	R/S
14	24 02	RCL 2
15	24 00	RCL 0
16	71	÷
17	32	CHS
18	74	R/S
19	24 03	RCL 3
20	24 00	RCL 0
21	71	÷
22	32	CHS
23	74	R/S
24	24 01	RCL 1

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25	24 00	RCL 0
26	71	÷
27	13 00	GTO 00
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 Det A
R_1 a_{11}
R_2 a_{12}
R_3 a_{21}
R_4 a_{22}
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene la matriz	a_{11}	STO	1			
		a_{12}	STO	2			
		a_{21}	STO	3			
		a_{22}	STO	4			
3	Calcule la determinante		f	PRGM	R/S		Det A
4	Calcule la inversa		R/S				a_{11}^{-1}
			R/S				a_{12}^{-1}
			R/S				a_{21}^{-1}
			R/S				a_{22}^{-1}
5	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

Encontrar la determinante y la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\text{Det } A = -20$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & -0{,}15 \end{bmatrix}$$

NUMERO EN BASE b A NUMERO EN BASE 10

Este programa está formado por dos subprogramas. Con el primero se cambia la parte entera de un número en base b a un número en base 10.

$$I_{10} = i_n i_{n-1} \dots i_2 i_1 = i_n b^{n-1} + i_{n-1} b^{n-2} + \dots + i_2 b + i_1$$

La evaluación se efectúa con el primer subprograma en la siguiente forma:

$$b\,(\dots (b\,(b\,(i_n\,b + i_{n-1}) + i_{n-2}) + \dots) + i_2) + i_1$$

Con el segundo subprograma se cambia la parte fraccionaria de un número en base b a un número en base 10.

$$F_{10} = f_1 f_2 \dots f_m = f_1 b^{-1} + f_2 b^{-2} + \dots + f_m b^{-m}$$

Con los dos subprogramas en conjunto se puede convertir cualquier número en base b a otro en base 10. Los ceros deben ingresarse en los lugares correspondientes.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	23 01	STO 1
02	24 00	RCL 0
03	31	↑
04	31	↑
05	31	↑
06	24 01	RCL 1
07	74	R/S
08	23 01	STO 1
09	34	CLX
10	51	+
11	61	x
12	24 01	RCL 1
13	51	+
14	13 07	GTO 07
15	24 00	RCL 0
16	15 22	g 1/x
17	23 02	STO 2
18	23 03	STO 3
19	61	x
20	74	R/S
21	24 02	RCL 2
22	24 03	RCL 3
23	61	x
24	23 03	STO 3

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	61	x
26	51	+
27	13 20	GTO 20
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 b
R_1 Empleado
R_2 b^{-1}
R_3 b^{-j}
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene la base	b	STO	0			
3	Para la parte entera, ingrese						
	el dígito más a la izquierda	i_n	f	PRGM	R/S		
4	Para j = n − 1, . . . , 2:						
	Ingrese el dígito siguiente	i_j*	R/S				
5	Ingrese el último dígito	i_1*	R/S				I_{10}
6	Para la parte fraccionaria,						
	ingrese el 1er digito	f_1	GTO	15	R/S		
7	Para j = 2,..., m−1:						
	Ingrese el dígito siguiente	f_j*	R/S				
8	Ingrese el último dígito	f_m*	R/S				F_{10}
9	Para nuevo caso vuelva a 2						
	* La escala debe mante-						
	nerse en estos puntos.						

Ejemplos:

1. $1777_8 = 1023_{10}$

2. $143{,}2044_5 = 48{,}4384_{10}$

NUMERO EN BASE 10 A NUMERO EN BASE b

Con este programa se convierte cualquier número positivo en base 10, N_{10}, a un número en base b, cuando $2 \leqslant b \leqslant 100$. Se usa un algoritmo iterativo que agrega un dígito a N_b en cada repetición. La ejecución del programa se detiene después de calcular cada N_b y en la pantalla se presentan las aproximaciones sucesivas al resultado final. Cuando el valor de N_b presentado alcanza la exactitud deseada, se pulsa R/S para detener la ejecución y luego se pulsa RCL 3 para presentar Nb en la pantalla.

Observaciones:

1. Cuando la base b es tal que $11 \leqslant b \leqslant 100$, se asignan dos posiciones en la pantalla a cada dígito de N_b. La separación se comienza por la derecha y a la izquierda del punto decimal. Por ejemplo: 41106.12 en base 16 reemplaza a 4B6.C.

2. Una indicación de error durante la ejecución del programa significa que se ha sobrepasado la capacidad de la máquina. En este caso el valor de N_b se encontrará en el registro R_3.

	PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
	00		
	01	24 00	RCL 0
	02	01	1
	03	00	0
	04	14 51	f x≥y
	05	13 09	GTO 09
	06	01	1
	07	00	0
	08	00	0
3	09	23 02	STO 2
	10	00	0
	11	23 03	STO 3
4	12	24 01	RCL 1
	13	14 07	f LN
	14	24 00	RCL 0
	15	14 07	f LN
	16	71	÷
	17	15 41	g x<0
	18	13 21	GTO 21
	19	14 01	f INT
	20	13 24	GTO 24
5	21	14 01	f INT
	22	01	1
	23	41	–
6	24	23 04	STO 4

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	24 02	RCL 2
26	21	x⇄y
27	14 03	f y^x
28	24 03	RCL 3
29	51	+
30	23 03	STO 3
31	14 74	f PAUSE
32	14 74	f PAUSE
33	24 00	RCL 0
34	24 04	RCL 4
35	14 03	f y^x
36	23 41 01	STO – 1
37	13 12	GTO 12
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 b
R_1 N_{10}
R_2 10 ó 100
R_3 N_b
R_4 1 dígito
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije el número de decimales		f	FIX	9		
3	Almacene la base y el	b	STO	0			
	número decimal	N_{10}	STO	1	f	PRGM	
4	Presente sucesivamente las						
	aproximaciones a N_b		R/S				(N_b)
5	Cuando vea un No. con la						
	aproximación deseada,						
	pulse R/S ; en seguida pulse		RCL	3			N_b
6	Para nuevo caso vuelva a 3						

Ejemplos:

1. $67{,}32_{10} = 403{,}050114_{16}$
   $= 43{,}51E_{16}$

2. $\pi = 3{,}141592654_{10} = 11{,}00100100_2$

PRODUCTO DE DOS VECTORES

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son dos vectores de tres componentes en un espacio tridimensional, el producto vectorial de A y B se expresará como A x B y se calculará en la forma siguiente:

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

La solución se representará como (c_1, c_2, c_3).

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	24 02	RCL 2
02	24 06	RCL 6
03	61	x
04	24 03	RCL 3
05	24 05	RCL 5
06	61	x
07	41	–
08	74	R/S
09	24 03	RCL 3
10	24 04	RCL 4
11	61	x
12	24 01	RCL 1
13	24 06	RCL 6
14	61	x
15	41	–
16	74	R/S
17	24 01	RCL 1
18	24 05	RCL 5
19	61	x
20	24 02	RCL 2
21	24 04	RCL 4
22	61	x
23	41	–
24	13 00	GTO 00

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1 a_1
R_2 a_2
R_3 a_3
R_4 b_1
R_5 b_2
R_6 b_3
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene A	a_1	STO	1			
		a_2	STO	2			
		a_3	STO	3			
3	Almacene B	b_1	STO	4			
		b_2	STO	5			
		b_3	STO	6			
4	Calcule producto vectorial		f	PRGM	R/S		c_1
			R/S				c_2
			R/S				c_3
5	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

Si $A = (2, 5, 2)$

$B = (3, 3, -4)$.

Solución:

$A \times B = (-26, 14, -9)$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES, NORMA Y ANGULO COMPRENDIDO

Si $\vec{a} = (a_1, a_2 ..., a_n)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ son dos vectores, la norma de $\vec{a}$ se expresa como $|\vec{a}|$, calculándose con la fórmula siguiente:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

e igualmente:

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$$

El producto escalar de los dos vectores a y b se muestra como $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y se calcula con la fórmula:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

El ángulo comprendido entre a y b se designa como θ y se calcula con la fórmula:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

El ángulo se puede calcular en cualquier notación angular. Cuando se calcula en grados, se da por sentado que se trata de grados con fracción decimal y no de minutos y segundos.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	31	↑
02	14 02	$g\ x^2$
03	23 51 01	STO + 1
04	22	R↓
05	21	x⇄y
06	31	↑
07	14 02	$g\ x^2$
08	23 51 00	STO + 0
09	22	R↓
10	61	x
11	23 51 02	STO + 2
12	13 00	GTO 00
13	24 02	RCL 2
14	24 00	RCL 0
15	24 01	RCL 1
16	61	x
17	14 02	$f\ \sqrt{x}$
18	71	÷
19	15 05	$g\ COS^{-1}$
20	13 00	GTO 00
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 Σa_i^2
R_1 Σb_i^2
R_2 $\Sigma a_i b_i$
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG	f	PRGM	
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Ingrese a_i y b_i	a_i	↑				
		b_i	R/S				
4	Calcule la norma de $\vec{a}$		RCL	0	f	$\sqrt{x}$	$\vert\vec{a}\vert$
5	Calcule la norma de b		RCL	1	f	$\sqrt{x}$	$\vert\vec{b}\vert$
6	Calcule $\vert\vec{a} \cdot \vec{b}\vert$		RCL	2			$\vert\vec{a} \cdot \vec{b}\vert$
7	Calcule el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$		GTO	13	R/S		θ

Ejemplo:

Si $A = (2, 5, 2)$
$B = (3, 3, -4)$

Solución:

$|\vec{a}| = 5{,}74$

$|\vec{b}| = 5{,}83$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 13{,}00$

$\theta = 67{,}16°$

ECUACIONES SIMULTANEAS CON DOS INCOGNITAS

Sean $ax + by = e$

y $\quad cx + dy = f$

un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En este caso se puede usar la Regla de Cramer para encontrar la solución.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Si $ad - bc = 0$, la calculadora indica *Error*. En este caso no existe solución o no hay una solución única.

PANTALLA LINEA	CLAVE	INGRESO
00		
01	24 03	RCL 3
02	24 05	RCL 5
03	61	x
04	24 02	RCL 2
05	24 06	RCL 6
06	61	x
07	41	–
08	24 01	RCL 1
09	24 05	RCL 5
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	41	–
15	23 00	STO 0
16	71	÷
17	74	R/S
18	24 01	RCL 1
19	24 06	RCL 6
20	61	x
21	24 03	RCL 3
22	24 04	RCL 4
23	61	x
24	41	–
25	24 00	RCL 0
26	71	÷
27	13 00	GTO 00
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 ad – bc
R_1 a
R_2 b
R_3 e
R_4 c
R_5 d
R_6 f
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene las constantes	a	STO	1			
		b	STO	2			
		e	STO	3			
		c	STO	4			
		d	STO	5			
		f	STO	6			
3	Encuentre x e y		f	PRGM	R/S		x
			R/S				y
4	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

$5x - 3y = 12$

$2x + y = 9$

Solución:

$x = 3{,}55$

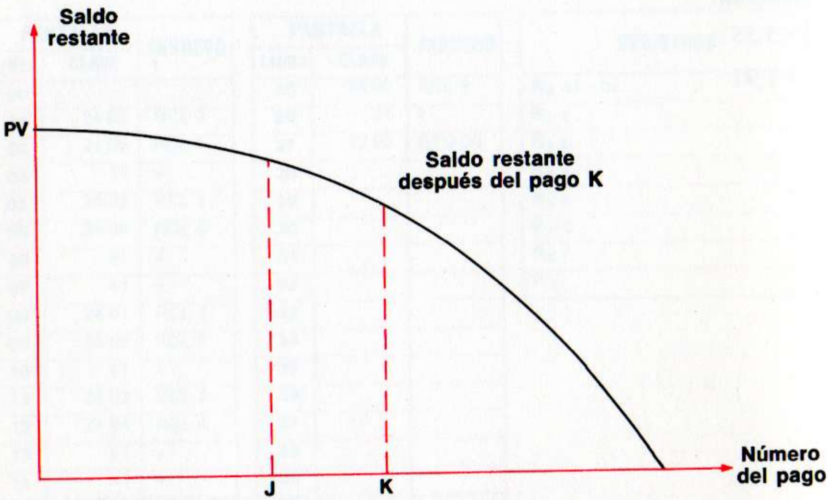
$y = 1{,}91$

CAPITULO II
FINANZAS

Muchos de los programas de finanzas tienen ciertas cantidades o valores en común, de modo que parece oportuno hacer algunas observaciones útiles referentes a estas variables y sus designaciones.

Los símbolos de las cinco variables más frecuentes en los problemas financieros son: n, i, PAGO, VA y VF. Con n se representa el número de períodos de pago o cuotas a plazo. La letra i representa la tasa de interés periódico, que en este programa debe expresarse como número decimal. Ejemplo: una tasa de interés anual de 6% se expresa como 0.06, que convertida a una tasa mensual será $0.06 \div 12 = 0.005$. PAGO se refiere al monto o cantidad del pago por período. VA representa el valor actual del capital o del préstamo con que se comienza el primer período. VF se emplea para expresar el valor futuro del préstamo o inversión, al final del último período.

AMORTIZACION DE PRESTAMOS INTERESES ACUMULADOS Y SALDO ADEUDADO



En el mundo de los cálculos financieros, sorprende el elevado porcentaje de las cuotas pagadas en las etapas iniciales del reembolso dę un préstamo que corresponde a intereses. Por ejemplo, el nuevo comprador de una casa envía envía su primera cuota mensual de $220.13 como pago a cuenta de una hipoteca de $30.000 a treinta años de plazo con una tasa de interés de 8% anual. El flamante propietario con gran satisfacción resta $220.00 de los $30,000 y piensa que ha hecho un buen negocio, pero su optimismo es exagerado porque de la cuotapagada $200.00 se destinan a intereses y sólo $20,13 se aplican a la amortización del propio préstamo.

Con este programa se puede calcular el monto abonado por concepto de intereses en uno o en varios pagos, así como el saldo pendiente del préstamo. Para efectuar el cálculo se ingresan los siguientes datos: el monto inicial del préstamo, la tasa de interés periódica y el monto del pago periódico o cuota. Luego se ingresa un número para el pago inicial, J, y otro para el pago final, K. El programa calcula los intereses acumulados desde el pago J hasta el K, inclusive. Si se desea conocer el monto de intereses abonados en un pago determinado, sencillamente se ingresa $K = J$.

Este programa también puede usarse para confeccionar un plan limitado de amortización que indique el saldo adeudado después de pagos sucesivos. Para este fin se deja $J = 1$ y K se aumenta en 1 en cada repetición. Los egresos darán el monto total de intereses hasta el pago K, así como el saldo adeudado después del pago K.

Ecuaciones:

$$SAL_K = \frac{1}{(1+i)^{-K}}\left[PAGO\frac{(1+i)^{-K}-1}{i} + VA\right]$$

$$Int_{J-K} = SAL_K - SAL_{J-1} + (K - J + 1)\,PAGO$$

donde SAL_n = saldo adeudado después del pago n

Int_{J-K} = intereses acumulados en pagos J a K

VA = monto del préstamo inicial

PAGO = monto por pago periódico

i = tasa de interés periódico

Observaciones:

1. La tasa periódica de interés i debe ingresarse como fracción decimal. Por ejemplo, para pagos mensuales con una tasa anual de interés de 9%, la tasa periódica de interés debe ingresarse en la siguiente forma:

$$i = \frac{,09}{12} = 0,0075.$$

2. El uso de este programa no se limita a la amortización de préstamos, sino que además puede aplicarse a cualquier préstamo reembolsable con pagos periódicos iguales.

Observaciones de programación:

En numerosos programas aplicados a las finanzas, se emplean repetidamente las expresiones $(1 + i)$ y $(1 + i)^n$. En tales casos conviene calcular dicha cantidad una sola vez y luego oalmacenarla para su uso posterior. En el presente programa, los valores de $(1 + i)^{-K}$ y $(1 + i)^{-J}$ se calculan una sola vez y se almacenan en R_7 ahorrando así pasos de programación y tiempo de ejecución. El mismo principio se aplica a otras expresiones de otros problemas.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
00							Calcular SALk
01	24 01	RCL 1	i				
02	01	1	1	i			
03	51	+	1 + i				
04	24 05	RCL 5	K	1 + i			
05	32	CHS	–K	1 + i			
06	14 03	f y^x	$(1 + i)^{-K}$				
07	23 07	STO 7	$(1 + i)^{-K}$				
08	01	1	1	$(1 + i)^{-K}$			
09	41	–	$(1 + i)^{-K}-1$				
10	24 01	RCL 1	i	$(1 + i)^{-K}-1$			
11	71	÷	s				Sea s $[(1 + i)^{-K}-1] \div i$
12	24 02	RCL 2	PMT	s			
13	61	x	PMT s				
14	24 03	RCL 3	PV	PMT s			
15	51	+	PMT s + PV				
16	24 07	RCL 7	$(1 + i)^{-K}$	PMT s + PV			
17	71	÷	BAL_K				
18	23 06	STO 6	BAL_K				
19	24 01	RCL 1	i	BAL_K			Calcular SAL j–1
20	01	1	1	i	BAL_K		
21	51	+	(1 + i)	BAL_K			
22	24 04	RCL 4	J	(1 + i)	BAL_K		
23	01	1	1	J	(1 + i)	BAL_K	
24	41	–	J – 1	(1 + i)	BAL_K	BAL_K	
25	32	CHS	– (J – 1)	(1 + i)	BAL_K	BAL_K	
26	14 03	f y^x	$(1 + i)^{-(J-1)}$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
27	23 07	STO 7	$(1 + i)^{1-J}$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
28	01	1	1	$(1 + i)^{1-J}$	BAL_K	BAL_K	
29	41	–	$(1 + i)^{1-J}-1$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
30	24 01	RCL 1	i	$(1 + i)^{1-J}-1$	BAL_K	BAL_K	
31	71	÷	s	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Sea s $[(1 + i)^{1-J}-1] \div i$
32	24 02	RCL 2	PMT	s	BAL_K	BAL_K	
33	61	x	PMT s	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
34	24 03	RCL 3	PV	PMT s	BAL_K	BAL_K	
35	51	+	PMT s + PV	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
36	24 07	RCL 7	$(1 + i)^{1-J}$	PMT s + PV	BAL_K	BAL_K	
37	71	÷	BAL_{J-1}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
38	41	–	Diff	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Dif = SALk – SALj–1
39	24 05	RCL 5	K	Diff	BAL_K	BAL_K	K – J + 1 día el número
40	24 04	RCL 4	J	K	Diff	BAL_K	de pagos desde J hasta K
41	41	–	K–J	Diff	BAL_K	BAL_K	
42	01	1	1	K–J	Diff	BAL_K	
43	51	+	K – J + 1	Diff	BAL_K	BAL_K	
44	24 02	RCL 2	PMT	m	Diff	BAL_K	m = K – J + 1
45	61	x	m PMT	Diff	BAL_K	BAL_K	m PMT = Pago J a K
46	51	+	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Presentar Int J a K
47	74	R/S	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
48	21	x⇄y	BAL_K	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	Presentar SALk
49	13 00	GTO 00	BAL_K	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	

REGISTROS	
R_0	
R_1	i
R_2	PAGO
R_3	V A
R_4	J
R_5	K
R_6	SAL_K
R_7	$(1 + i)^{-n}$

+18

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene las sigtes. variables:						
	Interés periódico (decimal)	i	STO	1			
	Pago periódico	PAGO	STO	2			
	Cantidad del pago inicial	VA	STO	3			
	Número del pago inicial	J	STO	4			
	Número del pago final	K	STO	5	f	PRGM	
3	Calcule intereses acumula-						
	dos desde pagos J hasta K.		R/S				$Int_{J\text{-}K}$
4	Presente el saldo adeudado						
	después del pago K		R/S				$SALDO_K$
5	Para cambiar alguna variable,						
	almacene nuevo valor en el						
	registro aprop. y vaya a 3						

Ejemplo:

El primer pago de amortización de una hipoteca debe hacerse a fines de Octubre de 1974 (es decir que Octubre es el primer período de pago). El préstamo es de $25.000, al 8% de interés anual. Los pagos mensuales son de $200. ¿Cuál es el saldo adeudado al final de cada año? Se necesita además un plan de intereses pagados y saldos adeudados para los primeros cinco años de amortización (períodos 12, 24, 36, 48 y 60).

Solución:

(Adviértase que i debe ingresarse como una tasa mensual, decimal.)

.08 [↑] 12 [÷] [STO] [1] 200 [STO] [2] 25000 [STO] [3] 1

[STO] [4] 3 [STO] [5] [f] [PRGM] [R/S] ⟶ 499,33

(Intereses pagados en 1974)

[R/S] ⟶ 24.899,33

(Saldo adeudado al fin de 1974)

4 [STO] [4] 15 [STO] [5] [R/S] ⟶ 1.976,65

(Intereses pagados en 1975)

[R/S] ⟶ 24.475,98

(Saldo adeudado al fin de 1975)

Ahora se genera la tabla de amortización:

1 STO 4 12 STO 5 R/S ⟶ 1.985,00
(Intereses en el primer año)

R/S ⟶ 24.585,00
(Saldo adeudado después de un año)

24 STO 5 R/S ⟶ 3.935,56
(Intereses pagados en el segundo año)

R/S ⟶ 24.135,56
(Saldo adeudado después del segundo año)

36 STO 5 R/S ⟶ 5.848,81
(Intereses pagados en el tercer año)

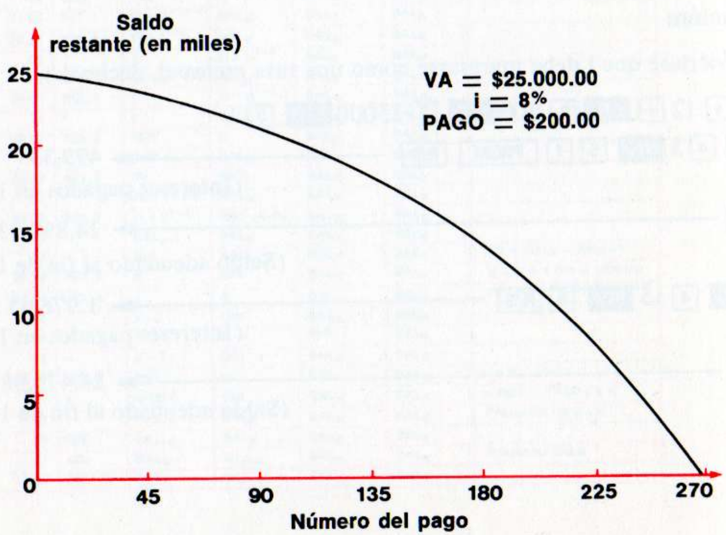
R/S ⟶ 23.648,81
(Saldo adeudado después del tercer año)

48 STO 5 R/S ⟶ 7.721,67
(Intereses pagados en el cuarto año)

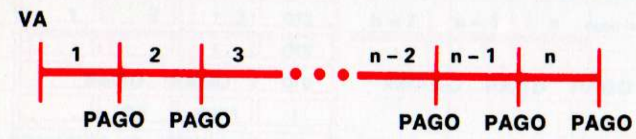
R/S ⟶ 23.121,67
(Saldo adeudado después del cuarto año)

60 STO 5 R/S ⟶ 9.950,77
(Intereses pagados en el quinto año)

R/S ⟶ 22.550,77
(Saldo adeudado después del quinto año)



AMORTIZACION DE PRESTAMOS HIPOTECARIOS PAGOS, VALOR ACTUAL, NUMERO DE PERIODOS



Con este programa se calcula el monto de cada pago y el valor actual o el número de cuotas periódicas de un préstamo, cuando se conocen el interés o las demás variables intervinientes. Recuérdese que la tasa de interés i debe expresarse en forma decimal. Ejemplo: 6% se ingresa como 0,06. Se usan las siguientes ecuaciones:

$$\text{PAGO} = \text{VA}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \qquad \text{VA} = \text{PAGO}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$n = -\frac{\ln(1 - i\ \text{VA}/\text{PAGO})}{\ln(1+i)}$$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	01	1
02	24 02	RCL 2
03	01	1
04	51	+
05	24 01	RCL 1
06	32	CHS
07	14 03	f y^x
08	41	−
09	24 02	RCL 2
10	21	x⇄y
11	71	÷
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	13 00	GTO 00
15	01	1
16	24 02	RCL 2
17	01	1
18	51	+
19	24 01	RCL 1
20	32	CHS
21	14 03	f y^x
22	41	−
23	24 02	RCL 2
24	71	÷

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	24 03	RCL 3
26	61	x
27	13 00	GTO 00
28	01	1
29	24 04	RCL 4
30	24 03	RCL 3
31	71	÷
32	24 02	RCL 2
33	61	x
34	41	−
35	14 07	f LN
36	24 02	RCL 2
37	01	1
38	51	+
39	14 07	f LN
40	71	÷
41	32	CHS
42	13 00	GTO 00
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3 PAGO
R_4 VA
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Para el pago	n	STO	1			
		i	STO	2			
		VA	STO	4			
			f	PRGM	R/S		PAGO
3	Para el valor actual	n	STO	1			
		i	STO	2			
		PAGO	STO	3			
			GTO	15	R/S		VA
4	Para el número de pagos	i	STO	2			
		PAGO	STO	3			
		VA	STO	4			
			GTO	28	R/S		n
5	Para un nuevo caso, vuelva al paso 2, 3 ó 4.						

Ejemplos:

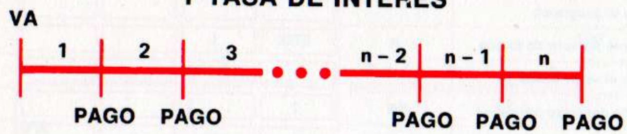
1. ¿Qué pago mensual corresponde a la amortización de un préstamo de \$3.000 al 9,5% (0,095) de interés anual, pagadero en 36 meses?
2. Si se desea pagar una cuota mensual de \$175 durante 24 meses con un interés de 9,5%, ¿cuánto se puede pedir en préstamo?
3. ¿Cuántos meses se tardará en cancelar un préstamo de \$4.000 si el pago mensual es \$200 y el interés anual es de 9,5%?

Soluciones:

Se divide 0,095 (tasa de interés anual) por 12 (12 meses) para determinar la tasa de interés mensual en fracción decimal.

1. \$96,10.
2. \$3.811,43.
3. 21,86 meses.

AMORTIZACION DE PRESTAMO HIPOTECARIO Y TASA DE INTERES



Con este programa se calcula la tasa de interés de un préstamo con pagos periódicos iguales. Se debe especificar el número de períodos, el valor actual o monto inicial del préstamo y la cuota periódica. Se obtiene una solución iterativa para i usando el método de Newton:

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)}$$

donde

$$f(i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{VA}{PAGO}\ .$$

La suposición inicial para i es dada por:

$$i_o = \frac{PAGO}{VA} - \frac{VA}{n^2\,PAGO}\ .$$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	24 03	RCL 3
02	31	↑
03	15 22	g 1/x
04	21	x⇄y
05	24 01	RCL 1
06	15 02	g x^2
07	71	÷
08	41	–
09	23 02	STO 2
10	24 03	RCL 3
11	24 02	RCL 2
12	61	x
13	01	1
14	24 02	RCL 2
15	01	1
16	51	+
17	24 01	RCL 1
18	32	CHS
19	14 03	f y^x
20	23 05	STO 5
21	41	–
22	41	–
23	24 01	RCL 1
24	24 02	RCL 2

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	15 22	g 1/x
26	01	1
27	51	+
28	71	÷
29	01	1
30	51	+
31	24 05	RCL 5
32	61	x
33	01	1
34	41	–
35	24 02	RCL 2
36	71	÷
37	71	÷
38	23 51 02	STO + 2
39	15 03	g ABS
40	33	EEX
41	06	6
42	32	CHS
43	14 41	f x<y
44	13 10	GTO 10
45	24 02	RCL 2
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3 VA / PAGO
R_4 $(1+i)^{-n}$
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene número de pagos	n	STO	1			
3	Ingrese el valor actual y						
	el monto del pago periódico	VA	↑				
		PAGO	÷	STO	3		VA/PAGO
4	Calcule los intereses		f	PRGM	R/S		i (decimal)
			EEX	2	x		i (%)
5	Para nuevo caso vuelva a 2						

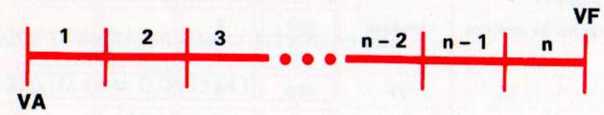
Ejemplo:

Si se obtiene un préstamo de \$2.500 a 36 meses de plazo, y si la cuota mensual es de \$86,67, ¿cuál será la tasa de interés anual?

Solución:

15,01%.

INTERES COMPUESTO



Con este programa se hacen cálculos relacionados con un capital depositado en una cuenta, con capitalización periódica y sin nuevos depósitos. Las variables que intervienen son: número de períodos de capitalización n, tasa de interés periódico i, capital o valor actual VA, valor futuro del capital VF, y cantidad de intereses acumulados I. Cualquiera de estos datos puede calcularse a partir de los otros mediante las fórmulas siguientes:

$$n = \frac{\ln (VF/VA)}{\ln (1 + i)} \qquad i = \left(\frac{VF}{VA}\right)^{1/n} - 1 \qquad VA = VF\,(1 + i)^{-n}$$

$$VF = VA\,(1 + i)^n \qquad I = VA\,[(1 + i)^n - 1]$$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	24 05	RCL 5
02	24 04	RCL 4
03	71	÷
04	14 07	f LN
05	24 02	RCL 2
06	01	1
07	51	+
08	14 07	f LN
09	71	÷
10	13 00	GTO 00
11	24 05	RCL 5
12	24 04	RCL 4
13	71	÷
14	24 01	RCL 1
15	15 22	g 1/x
16	14 03	f y^x
17	01	1
18	41	–
19	13 00	GTO 00
20	24 02	RCL 2
21	01	1
22	51	+
23	24 01	RCL 1
24	32	CHS

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	14 03	f y^x
26	24 05	RCL 5
27	61	x
28	13 00	GTO 00
29	24 02	RCL 2
30	01	1
31	51	+
32	24 01	RCL 1
33	14 03	f y^x
34	24 04	RCL 4
35	61	x
36	13 00	GTO 00
37	24 02	RCL 2
38	01	1
39	51	+
40	24 01	RCL 1
41	14 03	f y^x
42	01	1
43	41	–
44	24 04	RCL 4
45	61	x
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3
R_4 VA
R_5 VF
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Para calcular No. de periodos	i (decimal)	STO	2			
		VA	STO	4			
		VF	STO	5			
			f	PRGM	R/S		n
3	Para calcular la tasa de interés periódico	n	STO	1			
		VA	STO	4			
		VF	STO	5			
			GTO	11	R/S		i (decimal)
4	Para calcular el capital	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		VF	STO	5			
			GTO	20	R/S		VA
5	Para calcular el valor futuro	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		VA	STO	4			
			GTO	29	R/S		VF
6	Para intereses acumulados	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		VA	STO	4			
			GTO	37	R/S		I
7	Para nuevo caso vuelva al paso corresp. 2, 3, 4, 5 ó 6.						

Ejemplos:

1. ¿En cuánto tiempo se duplicarán los precios si la tasa de inflación anual se mantiene en 10%? Sugestión: hágase VA + 1 y VF = 2.

2. Encuéntrese la tasa de interés de $1000 capitalizados trimestralmente, si el capital acumulado en 10 años es $1.500.

3. ¿Qué suma se necesita invertir hoy al 5¾ % capitalizado trimestralmente para obtener $3000 en 5 años?

4. ¿Cuál es el valor futuro de $2000 invertidos al 5¾ % (0,575) de interés y capitalizados trimestralmente durante 4 años (16 trimestres)?

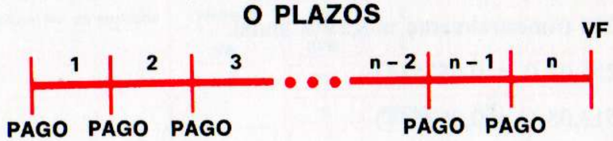
5. ¿Qué interés ganan $1500 depositados por 10 años al 5½ % capitalizados anualmente?

Soluciones:

1. 7,27 años.
2. 0,0205 trimestralmente = 8,19% anual.
3. $2.255,02 (i = 0,0575/4).
4. $2.513,08 (i = 0,0575/4).
5. $1.062,22 (i = 0,055).

AHORRO PERIODICO

CUOTAS O PAGOS, VALOR FUTURO, NUMERO DE PERIODOS O PLAZOS



Con este programa se pueden calcular cuotas, valor futuro o número de períodos para un plan de cuotas periódicas en una cuenta de ahorro, cuando se conoce la tasa de interés y dos de las otras tres variables. Recuérdese que la tasa de interés i debe ingresarse como fracción decimal. Ejemplo: 6% se ingresa como 0,06.

Las siguientes fórmulas sirven para calcular n, PAGO o VF:

$$n = \frac{\ln\left[\frac{\text{VF i}}{\text{PAGO}} + (1+i)\right]}{\ln(1+i)} - 1 \qquad \text{PAGO} = \frac{\text{VF i}}{(1+i)^{n+1} - (1+i)}$$

$$\text{VF} = \frac{\text{PAGO}}{i}\left[(1+i)^{n+1} - (1+i)\right]$$

PANTALLA LINEA	CLAVE	INGRESO	PANTALLA LINEA	CLAVE	INGRESO
00			25	14 73	f LASTx
01	24 02	RCL 2	26	24 01	RCL 1
02	24 05	RCL 5	27	14 03	f y^x
03	61	x	28	01	1
04	24 03	RCL 3	29	41	–
05	71	÷	30	71	÷
06	24 02	RCL 2	31	13 00	GTO 00
07	01	1	32	24 03	RCL 3
08	51	+	33	24 02	RCL 2
09	23 00	STO 0	34	01	1
10	51	+	35	51	+
11	14 07	f LN	36	61	x
12	24 00	RCL 0	37	14 73	f LASTx
13	14 07	f LN	38	24 01	RCL 1
14	71	÷	39	14 03	f y^x
15	01	1	40	01	1
16	41	–	41	01	–
17	13 00	GTO 00	42	61	x
18	24 05	RCL 5	43	24 02	RCL 2
19	24 00	RCL 2	44	71	÷
20	61	x	45	13 00	GTO 00
21	24 02	RCL 2	46		
22	01	1	47		
23	51	+	48		
24	71	÷	49		

REGISTROS
R_0 (1 + i)
R_1 n
R_2 i
R_3 PAGO
R_4
R_5 VF
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Para calcular No. de pagos						
		i (decimal)	STO	2			
		PAGO	STO	3			
		VF	STO	5			
			f	PRGM	R/S		n
3	Para calcular el monto del						
	pago periódico o cuota	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		VF	STO	5			
			GTO	18	R/S		PAGO
4	Para calcular el valor futuro	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		PAGO	STO	3			
			GTO	32	R/S		VF
5	Para nuevo caso vuelva al						
	paso corresp. 2, 3 ó 4.						

Ejemplos:

1. ¿En cuánto tiempo se ahorran $15 000 si se deposita $400 trimestralmente al 6% de interés anual?
2. Si dentro de 7 años se van a necesitar $10 000, ¿qué cuota mensual debe depositarse si la tasa de interés anual es de 6½ %?
3. ¿Qué capital acumulará quien deposite $150 mensuales por un período de 3 años al 6% (0,06) de interés anual?

Soluciones:

1. 29,62 trimestres o 7,4 años (i = 0,06/4).
2. $93,82 (n = 84, i = 0,065/12).
3. $5.929,92 (n = 36, i = 0,06/12).

FLUJO DEL EFECTIVO DESCONTADO

VALOR ACTUAL NETO, PORCENTAJE DE DEVOLUCION INTERNO

Este programa se aplica principalmente al cálculo del valor actual neto de una serie de flujos de caja. Ejemplo: se efectúa una inversión inicial V_0 en una empresa que originará los siguientes flujos periódicos de efectivo: $C_1, C_2, ..., C_n$. Dada una tasa de descuento i, la que debe ingresarse como fracción decimal, con el programa se calcula para cada flujo de caja C_k el valor actual neto en el período k: VAN_k. Si el valor de VAN_k es negativo significa que todavía no ha habido ganancia. Pero si el valor de VAN_k resulta positivo, la empresa ha obtenido ganancias equivalentes al monto en que se ha sobrepasado el porcentaje de devolución i de la inversión original.

El programa también puede usarse iterativamente para calcular un porcentaje de devolución interno. En este caso el objetivo es encontrar la tasa de descuento i que hará igual a cero el último valor actual neto VAN_n. Se procede en la siguiente forma: se almacena V_0 y una primera estimación del porcentaje de devolución i: luego se ingresan los flujos del efectivo desde C_1 hasta C_n para encontrar VAN_n. Si VAN_n es negativo, el valor estimado del porcentaje de devolución es demasiado alto. Si VAN_n resulta positivo, el valor estimado de i es demasiado bajo. El valor de i debe ajustarse según sea el caso, haciendo una nueva estimación e ingresándola. Luego se vuelven a ingresar los flujos del efectivo (de C_1 a Cn). Se examina el nuevo valor de VAN_n, se hace otra estimación y se repite el proceso. El procedimiento completo se repite hasta que VAN_n llegue a ser igual o muy aproximado a cero. El último valor ingresado para i se considera como el porcentaje de devolución interno.

Las cantidades correspondientes al valor actual neto se encuentran con esta fórmula:

$$VANk = -V_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{C_j}{(1+i)^j}$$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00			25		
01	24 01	RCL 1	26		
02	01	1	27		
03	23 04	STO 4	28		
04	51	+	29		
05	23 02	STO 2	30		
06	71	÷	31		
07	24 00	RCL 0	32		
08	41	−	33		
09	24 04	RCL 4	34		
10	14 74	f PAUSE	35		
11	21	$x \rightleftarrows y$	36		
12	23 03	STO 3	37		
13	74	R/S	38		
14	24 02	RCL 2	39		
15	24 04	RCL 4	40		
16	01	1	41		
17	51	+	42		
18	23 04	STO 4	43		
19	14 03	f y^x	44		
20	71	÷	45		
21	24 03	RCL 3	46		
22	51	+	47		
23	13 09	GTO 09	48		
24			49		

REGISTROS
R_0 V_0
R_1 i
R_2 (1 + i)
R_3 VAN_k
R_4 k
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese el capital o inversión						
	inicial y la tasa de descuento	V_0	STO	0			
		i (decimal)	STO	1	f	PRGM	
3	Para k = 1, . . . , n:						
	Ingrese Ck y calcule VANk	C_k	R/S				(k)
							VAN_k
4	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

Se presenta la ocasión de invertir $150.000 con un costo de capital de 10% después de pagados los impuestos. ¿Será ésta una inversión lucrativa, basándose en los siguientes flujos del efectivo?

Año	Flujo de caja
1	$30.000
2	$26.000
3	$50.000
4	$55.600
5	$45.200

Soluciones:

Téngase en cuenta que i se ingresa como 0,10.

$VAN_1 = -\$122.727,27$
$VAN_2 = -\$100.991,74$
$VAN_3 = -\$63.426,00$
$VAN_4 = -\$25.450,45$
$VAN_5 = \$2.615,20$

El valor positivo de C_5 significa que el flujo de caja es lucrativo siempre que el costo del capital sea 10%.

FUNCIONES DE CALENDARIO

DIAS DE LA SEMANA. DIAS ENTRE DOS FECHAS

Con este programa se calcula el día de la semana de una fecha determinada o el número de días transcurridos entre dos fechas, para cualquier fecha entre el 1° de marzo de 1700 y el 28 de febrero de 2100. En la estructuración de este programa, se asigna el número 1 al 1° de marzo de 1700 y un número correspondiente a cada día sucesivo. Cuando se calcula un día de la semana, el domingo se designa con el cero, el lunes con el 1, el martes con el 2, etc.

El número N asignado a la fecha para mes (m), día (d) y año (a) es:

$$N(m, d, a) = [365.25\ g(a,m)] + [30.6\ f(m)] + D - 621049$$

donde:

$$[m] \quad g(a,m) = \begin{cases} a-1 \text{ si } m = 1 \text{ ó } 2 \\ a \text{ si } m > 2 \end{cases} \qquad \text{además } f(m) = \begin{cases} m+13 \text{ si } m = 1 \text{ ó } 2 \\ m+1 \text{ si } m > 2 \end{cases}$$

[m] representa la función integral, $\boxed{f}\boxed{INT}$. Es decir (6,34) = 6.

Para fechas desde marzo 1° de 1700 hasta febrero 28 de 1800, se agregan 2 días al valor de N calculado por el programa. Para fechas desde marzo 1° de 1700 hasta febrero 28 de 1900 se agrega un día.

PANTALLA		INGRESO	PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE		LINEA	CLAVE	
00			25	00	0
01	03	3	26	73	·
02	24 01	RCL 1	27	06	6
03	14 41	f x<y	28	61	x
04	13 09	GTO 09	29	14 01	f INT
05	01	1	30	51	+
06	51	+	31	24 02	RCL 2
07	24 03	RCL 3	32	51	+
08	13 15	GTO 15	33	06	6
09	01	1	34	02	2
10	03	3	35	01	1
11	51	+	36	00	0
12	24 03	RCL 3	37	04	4
13	01	1	38	09	9
14	41	–	39	41	–
15	03	3	40	74	R/S
16	06	6	41	07	7
17	05	5	42	71	÷
18	73	·	43	15 01	g FRAC
19	02	2	44	07	7
20	05	5	45	61	x
21	61	x	46	13 00	GTO 00
22	14 01	f INT	47		
23	21	x⇄y	48		
24	03	3	49		

REGISTROS
R_0
R_1 mes
R_2 día
R_3 año
R_4
R_5
R_6
R_7 Temporal

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene el mes	m	STO	1			
	Almacene el día	d	STO	2			
	Almacene el año	a	STO	3			
3	Calcule N (m, d, y)		f	PRGM	R/S		N (m, d, a)
4	Para día de la semana ir a 8						
5	Para los días entre dos						
	fechas, primero almacene N		STO	7			
6	Repita los pasos 2 y 3 para la						
	segunda fecha y enseguida		RCL	7	-		# días
7	Para nuevo caso vuelva a 2						
8	Para día (0 = domingo)		R/S				día 0, . . . , 6.
9	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplos:

1. ¿Qué día de la semana fue el 4 de julio (julio 4) de 1776?
2. Encontrar el número de días transcurridos entre el 27 de marzo (marzo 27) de 1948 y el 7 de abril (abril 7) de 1975.

Soluciones:

1. Jueves (4). (Recuérdese que hay que agregar dos días.)
2. 9.872.

Observación Importante

En esta calculadora se usa la forma norteamericana de indicar fechas; es decir, primero el mes, luego el día y el año. Ejemplo: el 9 de agosto de 1975 se ingresa como 08 9 75.

Notas

CAPITULO III JUEGOS

SIMULADOR DE ALUNIZAJE

Imaginemos por un momento las dificultades que enfrentaría un astronauta para alunizar con un cohete que dispone de una reserva limitada de combustible. El cohete desciende vertiginosamente en caída libre con la cola apuntada a la luna. Para disminuir la velocidad el astronauta debe encender los retropropulsores, quemando combustible. Pero si se hacen muchas quemas el combustible se agotará mientras la nave todavía está a gran altura. En tal caso el astronauta verá horrorizado que la superficie lunar viene a su encuentro con creciente rapidez. Este juego consiste en regular el uso de los retropropulsores para alunizar correctamente.

El juego comienza cuando el vehículo desciende a 50 m/seg, a partir de 500 metros. La velocidad y la altitud se indican conjuntamente en la pantalla como: −50.0500. La altitud se indica a la derecha del punto decimal; la velocidad aparece a la izquierda con signo negativo para indicar que el movimiento es descendente. Si la velocidad apareciera sin una parte fraccionaria, −15., ello significaría que el cohete se ha estrellado a una velocidad de 15 m por segundo. En cuanto al juego esto significa que se ha perdido la partida, aunque en la vida real las consecuencias podrían haber sido graves. Se empieza el juego con 120 unidades de combustible. En cada etapa del descenso se puede quemar la cantidad de combustible que se estime necesario. Una quema de 5 unidades de combustible anulará la gravedad, manteniendo constante la velocidad de descenso. Una quema de más de 5 unidades haría que el vehículo pasara a tomar una velocidad ascendente. Hay que tener sumo cuidado de no agotar la reserva de combustible, porque si dejan de funcionar los retropropulsores la nave chocará contra la superficie lunar. En la pantalla se presentará la velocidad final de impacto, que será bastante elevada. La cantidad de combustible restante se puede ver en la pantalla recuperando el contenido del registro R_2.

Ecuaciones:

Este programa se basa en las conocidas fórmulas de la física de Newton, donde x, v, a y t son la distancia, velocidad, aceleración y tiempo, respectivamente:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad v = v_0 + at \qquad v^2 = v_0{}^2 + 2ax$$

Observaciones:

1. Si la nave se estrella antes de agotarse el combustible, en la pantalla se presentará la velocidad antes de la quema y no la velocidad de impacto.
2. Se usan sólo valores enteros para las quemas. Cualquier ingreso de número con decimales causará errores de presentación de V.X.

Comentarios de programación:

Un detalle interesante de este programa es la presentación simultánea de la velocidad y la altitud (V.X), por ejemplo −50.0500. Esta presentación se logra almacenando la velocidad (V) y la distancia (X) de manera normal (−50.00 y 500.00), dividiéndose X por 10 000 (10^4) antes de combinar las dos cantidades. Otra particularidad de este programa es el empleo del signo V y si ($X/10^4$) debe sumarse o restarse de V. Por ejemplo, por V − 50 y X = 500, debemos restar: V − ($X/10^4$) para generar un resultado de −50.0500. En cambio, si V = 10 y X = 50, debemos sumar: V = V + ($X/10^4$) para presentar 10.0050. Al analizar las líneas 2 al 12 de la lista del programa se verá la forma en que se aplicó una transferencia condicional para resolver el dilema.

PANTALLA		INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
LINEA	CLAVE						
00							
01	14 11 04	f FIX 4					Fijar en 4 lugares dec.
02	24 00	RCL 0	X				Presentación en V.X
03	33	EEX	1. 00	X			
04	04	4	1. 04	X			
05	71	÷	$X/10^4$				Dividir X por 10 000
06	24 01	RCL 1	V	$X/10^4$			
07	15 41	g x<0	V	$X/10^4$			¿Es V negativo?
08	13 11	GTO 11	V	$X/10^4$			Sí, transferir
09	51	+	$V + X/10^4$				Nó, sumar V con X
10	13 13	GTO 13	$V + X/10^4$				
11	21	x⇄y	$X/10^4$	V			V< 0, sumar V con −X
12	41	−	$V - X/10^4$				
13	74	R/S	V.X				$V.X = V \pm (X/10^4)$
14	24 02	RCL 2	F	B			Encendido E ingresaoo
15	14 41	f x<y	F	B			¿Quema > combustible?
16	13 34	GTO 34	F	B			Sí; alunizaje violento
17	22	R↓	B			F	Nó; actualizar A, X, V
18	23 41 02	STO − 2	B			F	Reste combust. usado
19	05	5	5	B			5 unidades = 0 Gravedad
20	41	−	B − 5				Aceleración = B − 5
21	23 03	STO 3	A				
22	02	2	2	A			
23	71	÷	A/2				
24	24 00	RCL 0	X	A/2			
25	51	+	X + A/2				
26	24 01	RCL 1	V	X + A/2			
27	51	+	X + V + A/2				Nueva altitud: X←X+V+A/2
28	23 00	STO 0	X				
29	15 41	g x<0	X				¿Está X bajo la superficie?
30	13 44	GTO 44	X				Si, Vd se estrelló
31	24 03	RCL 3	A	X			No; actualizar V
32	23 51 01	STO + 1	A	X			Nueva veloc: V ← V + A
33	13 02	GTO 02	A	X			Presentar V.X
34	24 01	RCL 1	V				Combustible agotado;
35	15 02	g x^2	V^2				mostrar velocidad de
36	24 00	RCL 0	X	V^2			impacto como:
37	01	1	1	X	V^2		$V = (V^2 + 2gX)^{1/2}$
38	00	0	10	X	V^2		en que g = gravedad = 5
39	61	×	10 X	V^2			
40	51	+	V^2 + 10 X				
41	14 02	f $\sqrt{x}$	V				
42	32	CHS	V				Presentar impacto
43	23 01	STO 1	V				
44	24 01	RCL 1	V				Pasar aquí desde línea 30
45	14 11 00	f FIX 0	V				Presentar entero V para
46	13 00	GTO 00	V				indicar alunizaje violento
47							
48							
49							

REGISTROS	
R_0	X
R_1	V
R_2	Combustible
R_3	Aceleración
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales	X	500	STO	0		500.00
		V	50	CHS	STO	1	-50.00
		Combustible	120	STO	2		120.00
3	Presente el valor inicial V.X		f	PRGM	R/S		-50.0500
4	Ingrese encendido; calcule						
	nueva velocidad y distancia	Encendido	R/S				V.X
5	Ejecute el paso 4 hasta el						
	alunizaje o el impacto						
6	Para ver el combustible que						
	queda en cualquier momento		RCL	2			Combustible
7	Para presentar la velocidad y						
	dist. en cualquier momento		f	PRGM	R/S		V.X
8	Para nuevo juego vuelva a 2						

Ejemplo:

500 STO 0 50 CHS STO 1 120 STO 2

f PRGM R/S ——→ -50,0500

0 R/S ——→ -55,0448

5 R/S ——→ -55,0393

(nótese que la constante V al encenderse = 5)

30 R/S ——→ -30,0350

0 R/S ——→ -35,0318

0 R/S ——→ -40,0280

0 R/S ——→ -45,0238

0 R/S ——→ -50,0190

RCL 2 ——→ 85,0000

(combustible sobrante)

f PRGM R/S ——→ -50,0190

(muestre V.X otra vez)

10 R/S ——→ -45,0143

0 R/S ——→ -50,0095

RCL 2 ——→ 75,0000

10 R/S ——→ -45,0048

25 R/S ——→ -25,0013

20 R/S ——→ -25,

¡Error!

JUEGO DE LOS OBJETOS

El "juego de los objetos" es un entretenimiento interesante que se puede efectuar con la HP-25. Se comienza con un número N de objetos, o bien, cuando se juega con la calculadora, con el número positivo N. Luego cada jugador va restando 1, 2 ó 3 del total, hasta reducirlo a 1. Pierde el jugador que se ve obligado a quedarse con el último objeto.

Cuando se juega entre el operador y la máquina, se ingresa el número de objetos con que se desea empezar, es decir se determina el valor de N, por ejemplo 15 que es un número adecuado. La máquina presentará el saldo restante de objetos después de cada jugada. La presentación de un signo negativo indica el turno del operador, y uno positivo señala el de la máquina. El desafiador inicia el juego (en este caso el operador).

Es posible ganarle a la máquina, pero no se olvide que es un adversario formidable. Por lo tanto, si el operador se equivoca puede darse por perdido. Desde luego, si el jugador hace trampa y quita un número que no sea 1, 2 ó 3 le ganará a la calculadora, ya que ésta no podrá detectar el fraude.

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	31	↑
02	01	1
03	23 02	STO 2
04	22	R↓
05	23 41 00	STO − 0
06	24 00	RCL 0
07	15 71	g x=0
08	13 42	GTO 42
09	23 61 02	STO × 2
10	24 02	RCL 2
11	74	R/S
12	21	x⇄y
13	15 51	g x≥0
14	13 17	GTO 17
15	21	x⇄y
16	13 02	GTO 02
17	01	1
18	32	CHS
19	23 02	STO 2
20	00	0
21	23 01	STO 1
22	24 01	RCL 1
23	03	3
24	14 71	f x=y

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25	13 40	GTO 40
26	01	1
27	23 51 01	STO + 1
28	32	CHS
29	24 00	RCL 0
30	51	+
31	24 01	RCL 1
32	41	−
33	04	4
34	71	÷
35	15 01	g FRAC
36	15 61	g x≠0
37	13 22	GTO 22
38	24 01	RCL 1
39	13 05	GTO 05
40	01	1
41	13 05	GTO 05
42	24 02	RCL 2
43	15 41	g x<0
44	13 47	GTO 47
45	24 03	RCL 3
46	13 00	GTO 00
47	24 04	RCL 4
48	14 11 01	f FIX 1
49	13 00	GTO 00

REGISTROS
R_0 Total
R_1 La HP-25 hace su movida
R_2 ± Total
R_3 55178
R_4 3507.1
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales	55178	STO	3			
		3507.1	STO	4	f	PRGM	
3	Almacene No. total de objetos						
	(unos 15) y fije No. decimales	N	STO	0	CHS	f	
			FIX	0			-N.
4	Si el número presentado es						
	negativo, ingrese su movida	Su jugada	R/S				+ Total
5	Si es positivo						
	la HP-25 hace su movida		R/S				- Total
6	Ejecute los pasos 4 y 5 hasta						
	finalizar el juego						
7	Al final del juego, invierta la						
	calculadora y lea el mensaje						
8	Para otro juego, vuelva a 3.						

Ejemplo:

Iniciar la partida con N = 15.

El jugador retira 3 objetos

3 [R/S] ——→ 12.

[R/S] ——→ -9.

La calculadora retira 3 objetos

El jugador retira 2 objetos

2 [R/S] ——→ 7.

[R/S] ——→ -5.

La calculadora retira 2 objetos

El jugador retira 3 objetos

3 [R/S] ——→ 2.

[R/S] ——→ -1.

La calculadora retira 1 objeto

El jugador retira el último objeto

1 [R/S] ——→ 55178.

Gírese la calculadora de manera que la pantalla se vea al revés. Se leerá la palabra OLE (¡olé!).

ENSEÑANZA DE ARITMETICA

Hewlett-Packard estima que la calculadora de bolsillo dista mucho de ser una amenaza para los sistemas tradicionales de enseñanza de matemáticas. Por lo contrario, este instrumento puede emplearse creativamente para afianzar el interés de los alumnos en la aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo o análisis numérico. El presente programa constituye un juego destinado a enseñar las cuatro operaciones fundamentales (+, −, ×, ÷) a los niños. Este programa es una pequeña demostración de la capacidad de la HP-25 como instrumento educacional, poco explotado aún.

En este programa se presentan problemas de aritmética. El alumno ingresa una respuesta al primer problema, la que se compara con la respuesta correcta que contiene la máquina. Si el alumno ha acertado, la calculadora presenta otro problema; en caso contrario vuelve a presentar el mismo problema, dando al alumno una segunda oportunidad para resolverlo.

Antes de ejecutar el programa, en el registro R_0 se almacena un valor tope llamado "Max". Así, el programa se limita a emplear números menores que Max en los problemas. Por ejemplo, si se ingresa 12 como Max, todos los problemas serán de números entre 0 y 11. Luego se almacena en R_1 un indicador s (que es un número 0 ó 1), para determinar la secuencia de los problemas. Con el uso indicadores diferentes se generan problemas distintos, introduciendo variedad en el juego. En seguida el maestro fija en dos decimales la presentación en la pantalla, pulsando [f] [FIX] [2], con lo que aparecerá un número de una o varias cifras a la izquierda del punto decimal y otro de dos cifras a la derecha. Por ejemplo, si se ingresan los números 8 y 2, éstos se presentarán como 8.02 en la pantalla. El maestro decidirá la operación que desea realizar con estos dos números: sumar (8 +), restar (8 − 2), multiplicar (8 × 2) o dividir (8 ÷ 2).

Después de ingresada la respuesta del alumno y reiniciada la ejecución del programa, la HP-25 presenta un nuevo problema si la respuesta ha sido correcta; de lo contrario repite los mismos dos números, pero esta vez precedidos del signo negativo (−8.02) para indicar que la respuesta anterior fue incorrecta. En este caso no se trata de un número negativo, porque todos los números usados en estos problemas son positivos, aunque es obvio que el resultado de algunas restas puede ser negativo. Si el problema reaparece con un signo negativo, el alumno debe probar nuevamente, ingresando otra respuesta. Tan pronto como se reciba la respuesta correcta, el programa pasará a presentar un nuevo problema.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00			25	51	+
01	24 01	RCL 1	26	23 04	STO 4
02	15 73	g π	27	74	R/S
03	15 02	g x^2	28	24 02	RCL 2
04	61	×	29	24 03	RCL 3
05	15 01	g FRAC	30	51	+
06	23 01	STO 1	31	13 43	GTO 43
07	24 00	RCL 0	32	24 02	RCL 2
08	61	×	33	24 03	RCL 3
09	14 01	f INT	34	41	–
10	23 03	STO 3	35	13 43	GTO 43
11	24 01	RCL 1	36	24 02	RCL 2
12	15 73	g π	37	24 03	RCL 3
13	15 02	g x^2	38	61	×
14	61	×	39	13 43	GTO 43
15	15 01	g FRAC	40	24 02	RCL 2
16	23 01	STO 1	41	24 03	RCL 3
17	24 00	RCL 0	42	71	÷
18	61	×	43	14 71	f x=y
19	14 01	f INT	44	13 01	GTO 01
20	23 02	STO 2	45	24 04	RCL 4
21	24 03	RCL 3	46	32	CHS
22	33	EEX	47	13 27	GTO 27
23	02	2	48		
24	71	÷	49		

REGISTROS
R_0 Max
R_1 No. aleatorio
R_2 No. a la izquierda
R_3 No. a la derecha
R_4 Problema
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene Max (0 < Max ≤ 100)	Max	STO	0			
3	Almacene indicador (0 < s < 1)	s	STO	1			
4	Fije el número de decimales		f	FIX	2		
5	Origine un problema		f	PRGM	R/S		$n_1 . n_2$
6	Elija una operación e ingrese						
	el resultado:						
	Para suma (+)	$n_1 + n_2$	R/S				
	Para resta (–)	$n_1 - n_2$	GTO	32	R/S		
	Para multiplicación (×)	$n_1 \times n_2$	GTO	36	R/S		
	Para division (÷)	$n_1 \div n_2$	GTO	40	R/S		
7	Si el resultado era correcto el						
	programa presentará un nuevo						
	problema; regrese al paso 6.						$n_3 . n_4$
8	Si era incorrecto, el programa						
	mostrará el mismo problema;						
	regrese al paso 6.						$-n_1 . n_2$
9	Repita los pasos 6 a 8 todas						
	las veces que desee						
10	Para cambiar Max, vuelva al						
	paso 2 y en seguida al paso 5.						

Ejemplo:

Si Max = 12 y el indicador s = 0,725

Solución:

f PRGM R/S ⟶ 6,01

(6 + 1 = 7)

7 R/S ⟶ 8,03

(8 x 3 = 25)

25 GTO 3 6 R/S ⟶ –8,03

(Try again: 8 x 3 = 24)

24 GTO 3 6 R/S ⟶ 3,11

(3 – 11 = –8)

8 CHS GTO 3 2 R/S ⟶ 9,00

(9 + 0 = 9)

9 R/S ⟶ 2,05

etc.

Notas

CAPITULO IV
NAVEGACION

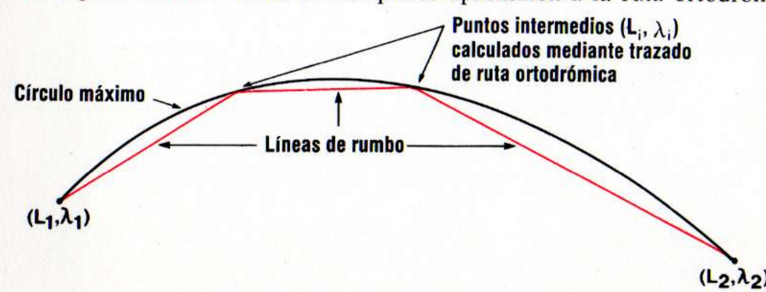
PLANEAMIENTO DE RUTAS: TRAZADO DE RUTA ORTODROMICA Y NAVEGACION LOXODROMICA

Los largos viajes por mar o aire se realizan siguiendo una ruta de navegación en forma de una curva loxodrómica u ortodrómica. La curva loxodrómica consiste en una línea continua entre dos puntos de la superficie terrestre, que forma un mismo ángulo en su intersección con todos los meridianos. La curva loxodrómica se presenta como una línea recta entre dos puntos de una proyección de Mercator. Esta ruta es de gran utilidad práctica en la navegación porque no cambia de dirección y resulta adecuada en la mayoría de los cálculos de rumbo para viajes de corta distancia, en latitudes medias o bajas.

En viajes largos, fuera de los límites indicados, resulta más eficiente la ruta ortodrómica – también llamada ruta de navegación en círculo máximo – porque constituye la distancia más directa entre dos puntos de una superficie esférica. Sin embargo, para mantener esta ruta la nave debe cambiar de rumbo continuamente. Como tal curso resulta inconveniente, y es virtualmente imposible seguirlo, generalmente se usan varias líneas de rumbo para encontrar la mayor aproximación a la ruta ortodrómica.

Con el fin de planear el rumbo siguiendo esta última técnica, el oficial de navegación debe usar el programa *Trazado de ruta ortodrómica*. Primero se ingresa la latitud y la longitud tanto del punto de partida como del de destino. Luego, para cualquier longitud intermedia λ_i que se especifique, con el programa se calcula la latitud L_i en que la curva ortodrómica intersectará la longitud especificada. Si se calculan varios pares de coordenadas (L_i, λ_i), puede emplearse el programa de *Navegación loxodrómica* que permitirá determinar los rumbos y las distancias correspondientes a las líneas que unen los puntos intermedios a lo largo de la ruta ortodrómica.

Los datos de entrada del programa de navegación loxodrómica son las coordenadas de dos puntos del globo terrestre. Los datos de salida son el rumbo directo y la distancia entre el primer y el segundo punto. Este programa puede usarse solo, para determinar la línea de rumbo desde el punto de partida hasta el de destino. También puede utilizarse con el programa de ruta ortodrómica para calcular varias líneas que se aproximen a la ruta ortodrómica.



TRAZADO DE UNA RUTA ORTODROMICA

Ecuaciones:

$$L_i = \tan^{-1}\left[\frac{\tan L_2 \operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_1) - \tan L_1 \operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_2)}{\operatorname{sen}(\lambda_2 - \lambda_1)}\right]$$

donde (L_1, λ_1) = Coordenadas del punto de partida.

(L_2, λ_2) = Coordenadas del punto de destino.

(L_i, λ_i) = Coordenadas de un punto intermedio en la curva ortodrómica.

Observaciones:

Con este programa no se puede calcular a lo largo de líneas de longitud o meridianos $\lambda_1 = \lambda_2$).

PANTALLA		INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
LINEA	CLAVE						
00			λ_i, D.MS				
01	15 00	g →H	λ_i, D.d				Convertir λ_1 a °dec.
02	23 04	STO 4	λ_i				
03	24 01	RCL 1	λ_1	λ_i			
04	41	–	$\lambda_i - \lambda_1$				
05	14 04	f SIN	$\sin_1$				$\operatorname{sen}_1 = \operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_1)$
06	24 02	RCL 2	L_2	$\sin_1$			
07	14 06	f TAN	$\tan_2$	$\sin_1$			$\tan_2 = \tan L_2$
08	61	x	$\tan_2 \sin_1$				
09	24 04	RCL 4	λ_i	$\tan_2 \sin_1$			
10	24 03	RCL 3	λ_2	λ_i	$\tan_2 \sin_1$		
11	41	–	$\lambda_i - \lambda_2$	$\tan_2 \sin_1$			
12	14 04	f SIN	$\sin_2$	$\tan_2 \sin_1$			$\operatorname{sen}_2 = \operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_2)$
13	24 00	RCL 0	L_1	$\sin_2$	$\tan_2 \sin_1$		
14	14 06	f TAN	$\tan_1$				$\tan_1 = \tan L_1$
15	61	x	$\tan_1 \sin_2$	$\tan_2 \sin_1$			
16	41	–	NUM				NUM = $\tan_2 \operatorname{sen}_1 - \tan_1 \operatorname{sen}_2$
17	24 03	RCL 3	λ_2	NUM			
18	24 01	RCL 1	λ_1	λ_2	NUM		
19	41	–	$\lambda_2 - \lambda_1$	NUM			
20	14 04	f SIN	DEN	NUM			DEN = $\operatorname{sen}(\lambda_2 - \lambda_1)$
21	71	÷	NUM/DEN				
22	15 06	g TAN^{-1}	L_i, D.d				
23	14 00	f →H.MS	L_i, D.MS				Presentar L_1 en GMS
24	14 11 04	f FIX 4					
25	13 00	GTO 00					
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTROS	
R_0	L_1 grados dec
R_1	λ_1 grados dec.
R_2	L_2 grados dec
R_3	λ_2 grados dec.
R_4	λ_i grados dec.
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese las coordenadas						
	del punto de partida:						
	Latitud (CHS para S)	L_1, G.MS	g	→H	STO	0	L_1, grad. dec.
	Longitud (CHS para E)	λ_1, G.MS	g	→H	STO	1	λ_1, grad. dec.
3	Ingrese coords. da destino:						
	Latitud (CHS para S)	L_2, G.MS	g	→H	STO	2	L_2, grad. dec.
	Longitud (CHS para E)	λ_2, G.MS	g	→H	STO	3	λ_2, grad. dec.
4	Vuelva a inic. de la memoria		f	PRGM			
5	Ingrese la longitud intermedia						
	(CHS para S) y calcule la						
	latitud correspondiente	λ_i, G.MS	R/S				L_i, G.MS
6	Para nueva longitud intermedia						
	vaya al paso 5						

RUTA LOXODROMICA

Ecuaciones:

$$C = \tan^{-1} \frac{\pi (\lambda_1 - \lambda_2)}{180 \left[\ln \tan \left(45 + \frac{1}{2} L_2\right) - \ln \tan \left(45 + \frac{1}{2} L_1\right)\right]}$$

$$D = \begin{cases} 60 (\lambda_2 - \lambda_1) \cos L; \cos C = 0 \\ 60 \dfrac{(L_2 - L_1)}{\cos C} \quad ; \text{ de lo contrario} \end{cases}$$

donde (L_1, λ_1) = Coordenadas del punto inicial.
(L_2, λ_2) = Coordenadas del punto de destino.
C = Ruta loxodrómica.
D = Distancia loxodrómica.

Observaciones:

1. La ruta no debe pasar por el polo norte o sur.
2. La ruta no debe cruzar al este ni al oeste del meridiano 180° (línea de cambio de fecha).
3. A medida que C se aproxima a los 90° ó 270° se producirán errores en el cálculo de las distancias.
4. La exactitud se pierde en singladuras muy cortas.

PANTALLA LINEA	CLAVE	INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
00			λ_2	λ_1			
01	41	−	$\lambda_1 - \lambda_2$				
02	23 06	STO 6	$\lambda_1 - \lambda_2$				
03	02	2	2	$\lambda_1 - \lambda_2$			
04	71	÷	α				Sea $\alpha = 1/2\ (\lambda_1 - \lambda_2)$
05	14 04	f SIN	sin α				Normalizar α de modo que
06	15 04	g SIN^{-1}	norm α				$-180 \leq \lambda_1 - \lambda_2 \leq 180$;
07	09	9	9	α			encuentre la ruta mas corta
08	00	0	90	α			alrededor de la Tierra
09	71	÷	$\alpha/90$				
10	15 73	g π	π	$\alpha/90$			
11	61	x	$\pi\alpha/90$	$\pi\alpha/90$			
12	24 05	RCL 5	ln tan_2	$\pi\alpha/90$			
13	24 04	RCL 4	ln tan_1	y			Sea y = $n\alpha/90$
14	41	−	x	y			Sea x = ln tan_2 − ln tan_1
15	15 09	g →P	r	C			C = tan^{-1} y/x
16	22	R↓	C			r	
17	15 03	g ABS	|C|			r	
18	23 07	STO 7	|C|			r	
19	24 06	RCL 6	$\lambda_1 - \lambda_2$	|C|			
20	14 04	f SIN	sin 2α	|C|			Normalizar $\lambda_1 - \lambda_2$ de modo
21	15 04	g SIN^{-1}	norm 2α	|C|			que $-90 \leq \lambda_1 - \lambda_2 \leq 90$
22	15 41	g x<0	2α	|C|			x < 0 significa E a O
23	13 26	GTO 26	2α	|C|			
24	21	x⇄y	|C|	2α			O a E, |C| es el resultado
25	13 31	GTO 31	|C|	2α			
26	03	3	3	2α	|C|		E a O, el resultado es
27	06	6	36	2α	|C|		360 − |C|
28	00	0	360	2α	|C|		
29	24 07	RCL 7	|C|	360	2α	|C|	
30	41	−	360 − |C|				
31	74	R/S	Course				Presentar el rumbo
32	06	6	6				Calcular distancia D
33	00	0	60				
34	24 07	RCL 7	|C|	60			
35	14 05	f COS	cos |C|	60			
36	15 61	g x≠0	cos |C|	60			Si cos C ≠ 0,
37	13 45	GTO 45	cos |C|	60			Pasar a la linea 45
38	34	CLX	0	60			Cos C = 0; el rumbo es
39	24 06	RCL 6	$\lambda_1 - \lambda_2$				E u O
40	61	x	60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$				
41	24 02	RCL 2	L_2	60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$			
42	14 05	f COS	cos L_2	60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$			
43	61	x	Dist				D = 60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$ cos L
44	13 00	GTO 00	Dist				Parar y presentar distancia
45	71	÷	60/cos |C|				El rumbo no es E ni O
46	24 02	RCL 2	L_2				Aplicar formula:
47	24 00	RCL 0	L_1	L_2	60/cos |C|		D = 60($L_2 - L_1$)/cos C
48	41	−	$L_2 - L_1$	60/cos |C|			
49	61	x	Dist				Parada

REGISTROS	
R_0	L_1 grados dec.
R_1	λ_1 grados dec.
R_2	L_2 grados dec.
R_3	λ_2 grados dec.
R_4	ln tan ($45+L_1/2$)
R_5	ln tan ($45+L_2/2$)
R_6	$\lambda_1 - \lambda_2$
R_7	|C|

STEP	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese la latitud inicial						
	(CHS para S)	L_1, G.MS	g	→H	STO	2	
			2	÷	45	+	
			f	TAN	f	LN	
			STO	5			ln tan_1
3	Ingrese la longitud inicial						
	(CHS para E)	λ_1, G.MS	g	→H	STO	3	λ_1 grados dec.
4	Ingrese la latitud final						
	(CHS para S)	L_2, G.MS	g	→H	RCL	2	
			STO	0	x⇄y	STO	
			2	2	÷	45	
			+	f	TAN	f	
			LN	RCL	5	STO	
			4	x⇄y	STO	5	ln tan_2
5	Ingrese la longitud final						
	(CHS para E)	λ_2, G.MS	g	→H	RCL	3	
			STO	1	x⇄y	STO	
			3				λ_2 grados dec.
6	Calcule el rumbo		f	PRGM	R/S		C
7	Calcule la distancia		R/S				D
8	Para continuar el rumbo,						
	vuelva al paso 4 e ingrese						
	la nueva posición final.						

Ejemplo:

Un barco zarpa desde San Francisco de California (L 37° 49′ N, λ 122° 25′ W) con rumbo a Tokio (L 35° 40′ N, λ 139° 45′ E). El oficial de navegación ha decidido establecer tres rumbos diferentes para aproximarse al ortodrómico. Con este fin ha elegido dos puntos intermedios con latitudes λ 155° W y 175° E. ¿Cuáles son las líneas de rumbo que el barco debe seguir, y cuál es la distancia de cada singladura?

Solución:

Primero se ingresa el programa de navegación ortodrómica.

37,49 [g] [→H] [STO] [0] 122,25 [g] [→H] [STO] [1] 35,40 [g] [→H] [STO] [2] 139,45 [CHS] [g] [→H] [STO] [3] [f] [PRGM] 155 [R/S] ⟶ 47,4606

175 [CHS] [R/S] ⟶ 47,3610

Los dos puntos intermedios son (L 47° 46′ N, λ 155° W) y (L 47° 36′ N, λ 175° E).

Ahora se ingresa el programa de trazado de la línea de rumbo. Las coordenadas del punto de partida son:

37.49 [g] [→H] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [STO] [5]
122.25 [g] [→H] [STO] [3]

Para encontrar rumbo y distancia al primer punto intermedio:

47.4606 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x≷y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL] [5] [STO] [4] [x≷y] [STO] [5] 155 [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x≷y] [STO] [3] [f] [PRGM]

[R/S] → 292,67 (rumbo)

[R/S] → 1549,38 (distancia)

Encontrar rumbo y distancia al segundo punto intermedio:

47.361 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x≷y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL] [5] [STO] [4] [x≷y] [STO] [5] 175 [CHS] [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x≷y] [STO] [3] [f] [PRGM]

[R/S] → 269,53 (rumbo)

[R/S] → 1211,80 (distancia)

Encontrar rumbo y distancia al punto de destino:

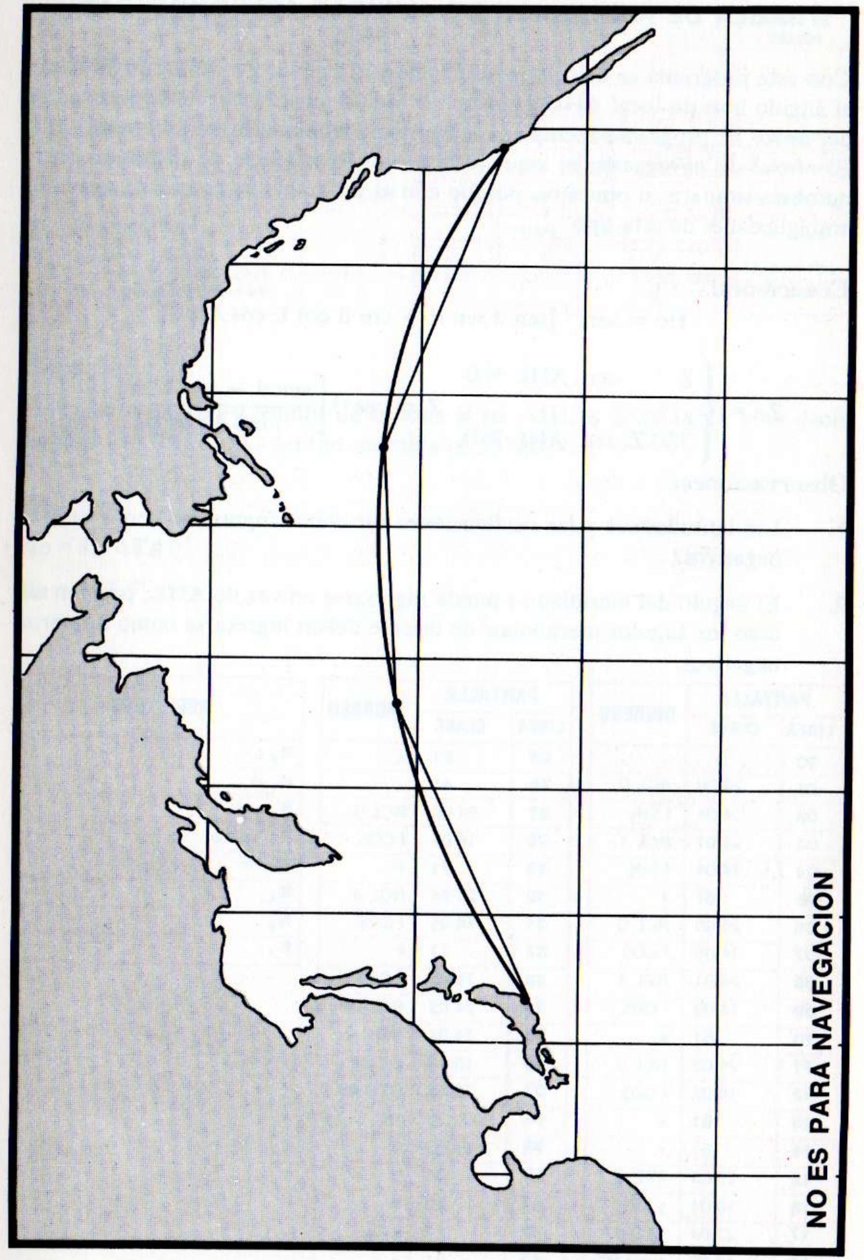
35.40 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x≷y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL] [5] [STO] [4] [x≷y] [STO] [5] 139.45 [CHS] [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x≷y] [STO] [3] [f] [PRGM]

[R/S] → 245,53 (rumbo)

[R/S] → 1728,66 (distancia)

Resumen:

Ubicación	Coordenadas	Ruta loxodrómica Rumbo	Distancia
San Francisco	L37° 49′N, λ 122° 25′W		
		292,7°	1549,38 m. n.
Primer punto intermedio	L47° 46′N, λ 155°W		
		269,5°	1211,80 m. n.
Segundo punto intermedio	L47° 36′N, λ 175°E		
		245,5°	1728,66 m. n.
Tokio	L35° 40′N, λ 139° 45′E		



La distancia total siguiendo las tres líneas de rumbo es de 4.489,5 millas marinas. La distancia ortodrómica entre San Francisco y Tokio es de 4.460 millas marinas. Con sólo dos puntos intermedios, la distancia aumenta en menos de 30 millas al seguir líneas de rumbo.

TABLA DE REDUCCION DE ALTURAS ASTRONOMICAS

Con este programa se calcula la altura Hc y el azimut Zn de un astro, dados el ángulo horario local AHL, la latitud L de un observador y la declinación del astro. El programa reemplaza a los nueve volúmenes de tablas HO 214. El oficial de navegación ni siquiera necesita preocuparse de distinguir entre nombres similares u opuestos, porque con el programa se resuelven todas las ambigüedades de este tipo.

Ecuaciones:

$$Hc = \text{sen}^{-1}\,[\text{sen d sen L} + \cos d \cos L \cos \text{AHL}]$$

$$Zn = \begin{cases} Z & \text{sen AHL} < 0 \\ 360\text{-}Z; & \text{sen AHL} \geq 0 \end{cases} \qquad Z = \cos^{-1}\left[\frac{\text{sen d} - \text{sen L sen Hc}}{\cos L \cos Hc}\right]$$

Observaciones:

1. Las latitudes sur y las declinaciones sur deben ingresarse como valores negativos.
2. El ángulo del meridiano t puede ingresarse en vez de AHL; pero en tal caso los ángulos meridianos de oriente deben ingresarse como números negativos.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	24 00	RCL 0
02	14 04	f SIN
03	24 01	RCL 1
04	14 04	f SIN
05	61	x
06	24 00	RCL 0
07	14 05	f COS
08	24 01	RCL 1
09	14 05	f COS
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	14 05	f COS
13	61	x
14	51	+
15	23 03	STO 3
16	15 04	g SIN^{-1}
17	23 04	STO 4
18	14 00	f →H.MS
19	74	R/S
20	24 01	RCL 1
21	14 04	f SIN
22	24 03	RCL 3
23	24 00	RCL 0
24	14 04	f SIN

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	61	x
26	41	–
27	24 00	RCL 0
28	14 05	f COS
29	71	÷
30	24 04	RCL 4
31	14 05	f COS
32	71	÷
33	15 05	g COS^{-1}
34	24 02	RCL 2
35	14 04	f SIN
36	15 41	g x<0
37	13 45	GTO 45
38	22	R↓
39	03	3
40	06	6
41	00	0
42	21	x⇄y
43	41	–
44	13 00	GTO 00
45	22	R↓
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 L
R_1 d
R_2 AHL
R_3 sen Hc
R_4 Hc
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese los siguientes datos:						
	Latitud del observador	L, G.MS	g	→H	STO	0	L, grad. dec.
	Declinación	d, G.MS	g	→H	STO	1	d, grad. dec.
	Angulo de la hora local	AHL, G.MS	g	→H	STO	2	AHL, grad. dec.
3	Calcule la altitud		f	PRGM	R/S		Hc, D.MS
4	Calcule el azimut		R/S				Zn, grad. dec.
5	Para nuevo caso vuelva a 2.						

Ejemplo:

Calcular la altitud y azimut de la luna si su AHL es 2°39′54″O y su declinación 13°51′06″S. La latitud asumida es 33°20′N.

Solución:

Hc = 42°44′47″

Zn = 183,5°

NAVEGACION ORTODROMICA

Con este programa se calcula la distancia entre dos puntos, siguiendo un rumbo ortodrómico y teniendo en cuenta el rumbo inicial desde el punto de partida, cuando se conocen la latitud y longitud del punto de partida (L_1, λ_1) y del punto de destino (L , λ_2).

Ecuaciones:

$$D = 60 \cos^{-1} \left[\sin L_1 \ \text{sen}\ L_2 + \cos L_1 \cos L_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\right]$$

$$H = \cos^{-1} \left[\frac{\text{sen}\ L_2 - \text{sen}\ L_1 \cos(D/60)}{\text{sen}\ (D/60) \cos L_1} \right]$$

$$H_i = \begin{cases} H & ;\ \text{sen}(\lambda_2 - \lambda_1) < 0 \\ 360\text{-}H; & \text{sen}(\lambda_2 - \lambda_1) \geqslant 0 \end{cases}$$

Observaciones:

1. Las latitudes sur y este deben ingresarse como números negativos.
2. Cuando los puntos de partida y destino están muy cerca (una milla o menos) ocurren errores de aproximación y redondeo.
3. No deben usarse coordenadas en lados diametralmente opuestos del globo terrestre.
4. No deben usarse latitudes de +90° o −90°.
5. No debe intentarse el cálculo de un rumbo inicial a lo largo de un mismo meridiano ($L_1 = L_2$).

PANTALLA		INGRESO	PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE		LINEA	CLAVE	
00			25	14 04	f SIN
01	24 00	RCL 0	26	24 03	RCL 3
02	14 04	f SIN	27	61	x
03	24 01	RCL 1	28	41	−
04	14 04	f SIN	29	24 00	RCL 0
05	61	x	30	14 05	f COS
06	24 00	RCL 0	31	71	÷
07	14 05	f COS	32	24 04	RCL 4
08	24 01	RCL 1	33	14 04	f SIN
09	14 05	f COS	34	71	÷
10	61	x	35	15 05	g COS^{-1}
11	24 02	RCL 2	36	24 02	RCL 2
12	14 05	f COS	37	14 04	f SIN
13	61	x	38	15 41	g $x<0$
14	51	+	39	13 47	GTO 47
15	23 03	STO 3	40	22	R↓
16	15 05	g COS^{-1}	41	03	3
17	23 04	STO 4	42	06	6
18	06	6	43	00	0
19	00	0	44	21	x⇄y
20	61	x	45	41	−
21	74	R/S	46	13 00	GTO 00
22	24 01	RCL 1	47	22	R↓
23	14 04	f SIN	48	13 00	GTO 00
24	24 00	RCL 0	49		

REGISTROS
R_0 L_1
R_1 L_2
R_2 $\lambda_2 - \lambda_1$
R_3 cos (D/60)
R_4 D/60
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese los siguientes datos:						
	Latitud del punto de partida	L_1, G.MS	g	→H	STO	0	L_1 grados dec.
	Latitud del punto de destino	L_2, G.MS	g	→H	STO	1	L_2 grados dec.
	Longitud del punto de destino	λ_2, G.MS	g	→H			λ_2 grados dec.
	Longitud del punto de partida	λ_1, G.MS	g	→H	-	STO	
	del rumbo ortodrómico.		2				$\lambda_2 - \lambda_1$ grad. dec.
3	Calcule la distancia		f	PRGM	R/S		D, naut. mi.
4	Calcule el rumbo proa inicial		R/S				H_i grad. dec.
5	Para un nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

Encontrar la distancia ortodrómica y el rumbo inicial desde San Francisco de California (L 37°49′ N, λ 122°25′ O) hasta Tokio (L 35°40′ N, λ 139°45′E).

Solución:

$D = 8.259,99$

$H_i = 303,29°$

Notas

CAPITULO V METODOS NUMERICOS

METODO DE NEWTON PARA RESOLVER f(x) = 0

La solución de ecuaciones como la siguiente representa uno de los problemas algebraicos más difíciles:

$$\ln x + 3x = 10.8074,$$

En casos como éste resulta imposible aislar la incógnita; es decir, no existe una solución algebraica sencilla. Por lo tanto se usa algún algoritmo para calcular las raíces reales de una ecuación polinomia $f(x) = 0$, si $f(x) = 1$ nx $+ 3x - 10{,}8074$.

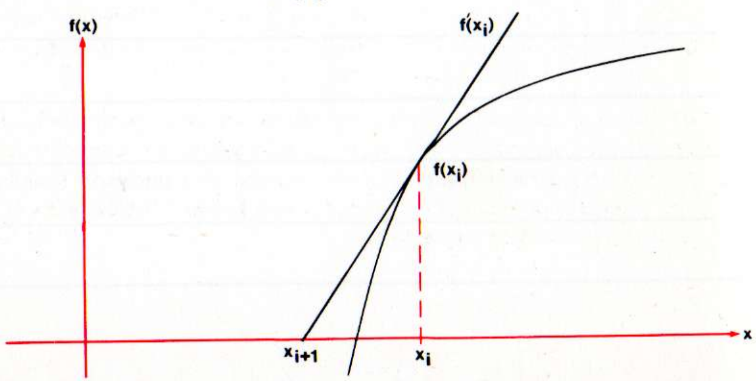
En el programa explicado más adelante se emplea el método de Newton para resolver $f(x) = 0$, entendiéndose que el operador debe definir $f(x)$. Esta definición de la función $f(x)$ se efectúa ingresando en la memoria de programa las pulsaciones de teclas necesarias, dándose por sentado que el valor de x se encuentra en el registro X. El operador tiene a su disposición 14 pasos de memoria para definir $f(x)$; y cuenta además con los registros de la escala operativa y los de almacenamiento R_5 a R_7.

En este programa se debe incluir una aproximación inicial x al resultado final. Cuanto más se acerque esta aproximación al resultado verdadero, tanto más pronto se encontrará la respuesta. La ejecución del programa se detiene cuando dos aproximaciones sucesivas de x (x_i ; x_{i+1}) caen dentro de los límites de tolerancia ϵ, es decir, cuando $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ Se debe ingresar el valor correspondiente a ϵ, el que en términos generales puede razonablemente ser $10^{-6} x_i$.

Ecuaciones:

La fórmula usada en el método de Newton para generar una nueva aproximación al resultado final es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Con este programa se encuentra una aproximación numérica para la derivada $f'(x)$ para obtener la siguiente ecuación:

$$x_{i+1} = x_i - \delta_i \left[\frac{f(x_i + \delta_i)}{f(x_i)} - 1 \right]^{-1}$$

donde $\delta_i = 10^{-5} x_i$

Observaciones:

1. Terminado el cálculo de la rutina de programación, se puede mostrar el último valor de $f(x)$ en la pantalla pulsando RCL 4. Si dicho valor no se aproxima suficientemente a cero, se puede repetir la ejecución del programa usando un valor menor para ε.

2. Se puede observar la convergencia de la función a 0 cambiando levemente el programa. Si se reemplaza g NOP en la línea 07 por f PAUSE la ejecución se detendrá brevemente después de cada iteración, y en la pantalla se presentarán los valores sucesivos de $f(x)$ que deben irse acercando a 0. Para realizar este cambio en un programa ya ingresado se efectúan las siguientes operaciones:

   1. Se pulsa GTO 0 6
   2. Se cambia al modo de programación (PRGM)
   3. Se pulsa f PAUSE
   4. Se cambia al modo de ejecución (RUN)
   5. Se pulsa f PRGM

Observaciones de programación:

Este es uno de los programas más complejos de este Manual. La dificultad principal radica en que es necesario calcular en cada iteración, tanto $f(x)$ como $f(x + \delta)$. Sin embargo basta con ingresar la función f una sola vez en la memoria de programa. Las grandes computadoras solucionan este problema mediante una subrutina. El programa que se ha considerado imita esta técnica, almacenando cierto valor en el registro R_0, conocido como "Señal indicadora" o simplemente "señal". Esta señal se coloca en cero para indicar que debe calcularse $f(x)$, y en 1 si debe calcularse $f(x + \delta)$.

Después de haberse calculado f, se hace una prueba de la señal indicadora. Si es 0, el programa se ramificará pasando a una instrucción que almacenará $f(x)$; si es 1 el programa continuará para calcular una derivada basada en $f(x + \delta$). Todas las operaciones vinculadas con la señal indicadora ocupan un total de nueve pasos del programa.

PANTALLA LINEA	CLAVE	INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
00							
01	34	CLX	0				Fijar señal a 0 para f(x)
02	23 00	STO 0	0				
03	24 01	RCL 1	x	0			Recuperar x y volver para
04	13 07	GTO 17	x	0			calcular f(x)
05	22	R↓	f(x)				Descender para quitar señal
06	23 04	STO 4	f(x)				
07	15 74	g NOP	f(x)				Pausa: ver convergencia
08	01	1	1	f(x)			Fijar señal a 1 para $f(x + \delta)$
09	23 00	STO 0	1	f(x)			
10	24 01	RCL 1	x	1	f(x)		
11	24 01	RCL 1	x	x	1	f(x)	
12	33	EEX	1. 00	x	x	1	
13	05	5	1. 05	x	x	1	
14	71	÷	10^{-5} x	x	1	1	
15	23 03	STO 3	δ	x	1	1	
16	51	+	$x + \delta$	1	1	1	
17							Las líneas 17 a 30
18							se reservan para que el
19							operador defina f(x)
20							
21							Esta sección se usa
22							para hallar f(x) y $f(x + \delta)$
23							La señal en Ro es O
24							para f(x), y 1 para
25							$f(x + \delta)$
26							
27							
28							
29							
30							
31	15 71	g x = 0	$f(x)/(x + \delta)$				¿Valor de la función = 0?
32	13 49	GTO 49	$f(x)/(x + \delta)$				Sí. Solución de egreso
33	24 00	RCL 0	Flag	$f(x)/(x + \delta)$			Nó. Verificar la señal
34	15 71	g x = 0	Flag	$f(x)/(x + \delta)$			¿Señal = 0?
35	13 05	GTO 05	Flag	f(x)			Sí. Tenemos f(x)
36	22	R↓	$f(x + \delta)$			Flag	Nó. Señal = 1. Tenemos
37	24 04	RCL 4	f(x)	$f(x + \delta)$			$f(x + \delta)$
38	71	÷	R				$R = f(x + \delta)/f(x)$
39	01	1	1	R			
40	41	–	R – 1				$R-1 = [f(x+\delta) - f(x)]/f(x)$
41	15 03	g 1/x	$(R - 1)^{-1}$				Aproximación
42	24 03	RCL 3	δ	$(R - 1)^{-1}$			$f'(x) = [f(x+\delta) - f(x)]/\delta$
43	61	x	$\delta/(R - 1)$				$\Delta = f(x)/f'(x)$
44	23 41 01	STO – 1	Δ				$x_{i+1} = x_i - \Delta$
45	15 03	g ABS	$\lvert\Delta\rvert$				
46	24 02	RCL 2	ϵ	$\lvert\Delta\rvert$			
47	14 41	f x<y	ϵ	$\lvert\Delta\rvert$			$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert > \epsilon$?
48	13 01	GTO 01	ϵ	$\lvert\Delta\rvert$			Sí. Iterar nuevamente
49	24 01	RCL 1	x	ϵ	$\lvert\Delta\rvert$		Nó. Presentar x y parar

REGISTROS	
R_0	Señal
R_1	x
R_2	ϵ
R_3	δ
R_4	f(x)
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese líneas 1 a 16						16 51
2	Ingrese la función f(x)						
3	Ingrese traspaso a la línea 31		GTO	31			
4	Pulse SST hasta que la						
	pantalla muestre la línea 30						
5	Ingrese líneas 31 a 49						
6	Pase a ejecución (RUN)						
7	Almacene suposición inicial	x_1	STO	1			
8	Almacene la tolerancia	ϵ	STO	2			
9	Calcule la solución		f	PRGM	R/S		x_0
10	Para camb. x_1 o ϵ vaya al paso						
	aprop. y almac. el nuevo valor.						

Ejemplo:

Los proyectistas de engranajes usan frecuentemente esta ecuación en sus cálculos:

$$\tan x - x - I = 0$$

Donde x es un ángulo expresado en radianes e I es la involuta de x. Encuéntrese el ángulo x_0 correspondiente a una involuta de 0,0324.

Observación:

Puesto que los proyectistas de engranajes suelen calcular x para varios valores de I, convendrá almacenar I en R_7 para usarlo como función de $f(x)$.

Solución:

Ejemplo de hoja de instrucciones

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese líneas 1 a 16						16 51
2	Ingrese los pasos para						
	f(x) = tan x – x – 1		f	TAN			17 14 06
			f	LASTx			18 14 73
			–				19 41
			RCL	7			20 24 07
			–				21 41
3	Ingrese traspaso a línea 31		GTO	31			22 13 31
4	Pulse SST 8 veces hasta						
	presentar la línea 30						
5	Ingrese las líneas 31 a 49						49 24 01
6	Pase a ejecución (RUN)						
7	Pase al modo angular		g	RAD			
8	Almacene I	.0324	STO	7			
9	Calcule x_1 = 1	1	STO	1			
10	Fije tolerancia en ε = 10-6	10^{-6}	STO	2			
11	Calcule la solución de X_0		f	PRGM	R/S		0.45
12	Convierta el ángulo en grados		180	x	g	π	
			÷				25.62
13	Presente el último valor de f(x)		RCL	4			2.30 –09

$x_0 = 25{,}62°$

Valor anterior de $f(x) = 2{,}30 \times 10^{-9}$

INTEGRACION NUMERICA, REGLA DE SIMPSON

Supongamos que x_0, x_1, ..., x_n, son puntos equidistantes tales que $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ cuyos valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ se conocen para una función $f(x)$. No se necesita conocer explícitamente esta función, pero si es conocida, los valores pueden encontrarse previamente almacenando la función en la memoria y evaluando diversos puntos. n debe ser un valor par, entero y positivo.

La regla de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Se indica la solución como I.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	24 00	RCL 0
02	03	3
03	71	÷
04	23 00	STO 0
05	61	x
06	23 01	STO 1
07	74	R/S
08	24 00	RCL 0
09	61	x
10	24 01	RCL 1
11	51	+
12	23 01	STO 1
13	74	R/S
14	24 00	RCL 0
15	61	x
16	04	4
17	61	x
18	24 01	RCL 1
19	51	+
20	23 01	STO 1
21	74	R/S
22	24 00	RCL 0
23	61	x
24	02	2

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	61	x
26	24 01	RCL 1
27	51	+
28	23 01	STO 1
29	13 13	GTO 13
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 h/3
R_1 Σ
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese el incremento	h	STO	0			
3	Ingrese valor de 1a función	$f(x_0)$	f	PRGM	R/S		Suma parcial
4	Ingrese valor de última función	$f(x_n)$	R/S				Suma parcial
5	Ingrese $i = 1, 2, \ldots, n-2$	$f(x_i)$	R/S				Suma parcial
6	Ingrese valor $i = n-1$	$f(x_{n-1})$	R/S				I

Ejemplo:

Calcúlese $\int_0^{\pi} \text{sen}^2\, x\, dx$ mediante la regla de Simpson, con $h = \pi/8$.

Primero hay que encontrar los siguientes datos:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$f(x_i)$	0	0,1464	0,5	0,8536	1	0,8536	0,5	0,1464	0

Solución:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2\, x\, dx \cong 1{,}5708$$

El resultado exacto es $\pi/2$.

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Con este programa es posible resolver una gran variedad de ecuaciones diferenciales de primer grado, del tipo:

$$y' = f(x, y)$$

con valores iniciales x_0, y_0.

Como resultado se obtiene una solución numérica en la que se calcula y_i para $x_i = x_0 + ih$, donde h es un incremento especificado por el operador e $i = 1, 2, 3, \ldots$

En este programa se emplea un método de Euler modificado (pronosticador-corrector):

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})]$$

Se ingresa $f(x, y)$ en la memoria de programa, comenzando en la línea 18. El operador dispone de 13 pasos para determinar el valor de $f(x, y)$. Dispone además de los registros R_5, R_6 y R_7. El operador debe ver que los valores de x e y se encuentren en los registros X e Y respectivamente. El resultado de la rutina de cálculo será el valor de $f(x, y)$ en el registro X (pantalla); la ejecución de esta parte del programa se termina con la pulsación de GTO 31.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00			25		
01	34	CLX	26		
02	23 04	STO 4	27		
03	24 02	RCL 2	28		
04	24 01	RCL 1	29		
05	13 18	GTO 18	30		
06	22	R↓	31	24 04	RCL 4
07	23 03	STO 3	32	15 71	g x=0
08	24 00	RCL 0	33	13 06	GTO 06
09	61	x	34	22	R↓
10	24 02	RCL 2	35	24 03	RCL 3
11	51	+	36	51	+
12	24 01	RCL 1	37	24 00	RCL 0
13	24 00	RCL 0	38	61	x
14	51	+	39	02	2
15	01	1	40	71	÷
16	23 04	STO 4	41	24 02	RCL 2
17	22	R↓	42	51	+
18			43	23 02	STO 2
19			44	24 01	RCL 1
20			45	24 00	RCL 0
21			46	51	+
22			47	23 01	STO 1
23			48	14 74	f PAUSE
24			49	22	x⇄y

REGISTROS
R_0 h
R_1 x
R_2 y
R_3 y'
R_4 Señal indicadora
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese líneas 1 a 17						17 22
2	Ingrese la función f(x, y)						
3	Ingrese traspaso a línea 31		GTO	31			
4	Pulse SST hasta que la pantalla muestre la línea 30						
5	Ingrese líneas 31 a 49						49 13 01
6	Pase a ejecución (RUN)						
7	Almacene el incremento	h	STO	0			
8	Almacene condiciones iniciales	x_0	STO	1			
		y_0	STO	2	f	PRGM	
9	Presente valor x siguiente y correspondiente valor y		R/S				(x_k) y_k
10	Repita paso 9 según desee.						

Ejemplo:

Resuelva numéricamente la ecuación diferencial $y' = x\sqrt{y}$ con las condiciones iniciales $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Use el paso de $h = 0.1$.

Solución:

Ingrese la función como x⇄y f √x ×

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y (por progr.)	1,0	1,1077	1,2319	1,3745	1,5372	1,7221
y (exacto)	1,0	1,1078	1,2321	1,3748	1,5376	1,7227

INTERPOLACION LINEAL

Si $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ son dos puntos de una función f(x), la función X_0 puede ser aproximada por la siguiente fórmula:

$$f(x_0) \cong \frac{(x_2 - x_0)\, f(x_1) + (x_0 - x_1)\, f(x_2)}{(x_2 - x_1)}$$

Esta es la fórmula que se denomina interpolación lineal. Lógicamente, x_2 no puede igualar a x_1.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	23 04	STO 4
02	24 00	RCL 0
03	41	–
04	24 03	RCL 3
05	61	x
06	24 02	RCL 2
07	24 04	RCL 4
08	41	–
09	24 01	RCL 1
10	61	x
11	51	+
12	24 02	RCL 2
13	24 00	RCL 0
14	41	–
15	71	÷
16	13 00	GTO 00
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 x_1
R_1 $f(x_1)$
R_2 x_2
R_3 $f(x_2)$
R_4 x_0
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene el primer punto	x_1	STO	0			
		$f(x_1)$	STO	1			
3	Almacene el segundo punto	x_2	STO	2			
		$f(x_2)$	STO	3	f	PRGM	
4	Ingrese x_0, encuentre	x_0	R/S				$f(x_0)$
5	Repita el paso 5 tantas veces						
	como desee valores x.						

Example:

Supongamos que

$$f(7.3) = 1{,}9879$$

$$f(7.4) = 2{,}0015,$$

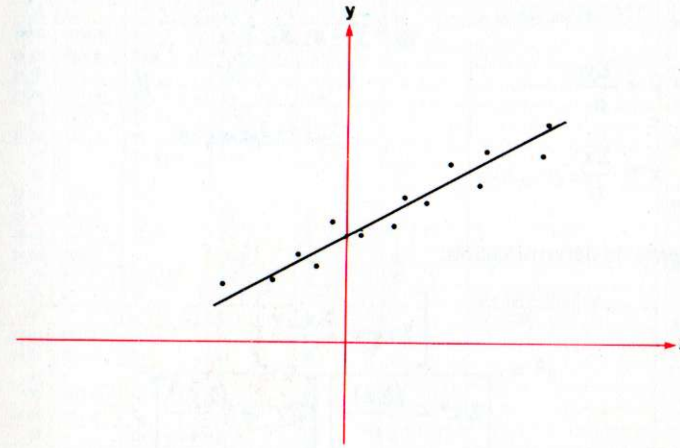
calcular por interpolación lineal f(7,37).

Solución:

$$f(7{,}37) = 1{,}9974$$

CAPITULO VI ESTADISTICA

AJUSTE DE CURVAS—REGRESION LINEAL



En la investigación de la relación existente entre dos variables de un sistema, conviene empezar por hacer observaciones experimentales para reunir valores pareados de las variables (x, y). Para este objeto debe buscarse la fórmula que mejor describa la relación entre las variables x e y. Generalmente se parte de la hipótesis de que existe una relación lineal; es decir, que la ecuación es $y = a_1x + a_0$, donde a_1 y a_0 son los valores constantes.

El propósito de este programa es encontrar las constantes a_1 y a_0 que den la mayor concordancia entre los datos experimentales y la ecuación $y = a_1 x + a_0$. En este caso se utiliza la técnica de regresión lineal por el método de los mínimos cuadrados.

El operador debe ingresar los valores pareados de los datos que ha acumulado (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Cuando se han ingresado todos los pares de datos, podrán calcularse las constantes de regresión a_1, a_0. También se puede calcular un tercer valor, el coeficiente de determinación, r^2. El valor de r^2, que queda entre 0 y 1, indica el grado de convergencia de la ecuación con los datos experimentales. Cuanto más próximo a 1 sea el valor de r^2, tanto mejor será el ajuste o grado de convergencia.

Ecuaciones:

$$y = a_1 x + a_0$$

A continuación se efectúan todas las sumatorias para $i = 1, \ldots, n$.
Constantes de regresión:

$$a_1 = \frac{\Sigma xy - \dfrac{\Sigma x\,\Sigma y}{n}}{\Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\,\overline{x}$$

Donde $\overline{y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

Coeficiente de determinación:

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma xy - \dfrac{\Sigma x \Sigma y}{n}\right]^2}{\left[\Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{n}\right]\left[\Sigma y^2 - \dfrac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}$$

Observaciones:

Los valores de a_0 y a_1 se almacenan en los registros R_0 y R_1 respectivamente. Una vez calculados a_0, a_1 y r^2, el valor de y ($\hat{y}$), correspondiente a cualquier valor de x, puede calcularse con la fórmula $y = a_1 x + a_0$.

Comentarios de programación:

El valor intermedio $C = \Sigma xy - (\Sigma x \Sigma y/n)$ se calcula en la línea 14, pero también se necesita casi al final del programa para calcular r^2. Como todos los registros desde R_0 hasta R_7 están en uso, el único lugar disponible para retener este valor intermedio es la escala operativa. Por lo tanto, cuando se usa, C se conserva en uno o más registros entre las líneas 14 y 36. Debido a la presencia de C, no debe perturbarse el contenido de la escala después de calcular a_0 y a_1 (véase la instrucción del paso 4 del formulario de programación).

PANTALLA		INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
LINEA	CLAVE						
00			y	x			Pasos 1 a 7 para
01	31	↑	y	y	x		sumatoria
02	15 02	g x^2	y^2	y	x		
03	23 51 02	STO + 2	y^2	y	x		Σy^2
04	22	R↓	y	x		y^2	
05	21	x⇄y	x	y		y^2	
06	25	Σ+	n	y		y^2	n, Σy, Σxy, Σx^2, Σx
07	13 00	GTO 00	n	y		y^2	
08	24 05	RCL 5	Σxy				
09	24 07	RCL 7	Σx	Σxy			
10	24 04	RCL 4	Σy	Σx	Σxy		
11	61	x	$\Sigma x\ \Sigma y$	Σxy			
12	24 03	RCL 3	n	$\Sigma x\ \Sigma y$	Σxy		
13	71	÷	$\Sigma x\ \Sigma y/n$	Σxy			
14	41	–	C				$C = \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y/n)$
15	24 06	RCL 6	Σx^2	C			
16	24 07	RCL 7	Σx	Σx^2	C		
17	15 02	g x^2	$(\Sigma x)^2$	Σx^2	C		
18	24 03	RCL 3	n	$(\Sigma x)^2$	Σx^2	C	
19	71	÷	$(\Sigma x)^2/n$	Σx^2	C	C	
20	41	–	D	C	C	C	$D = \Sigma x^2 - [(\Sigma x)^2/n]$
21	71	÷	a_1	C	C	C	$a_1 = C/D$
22	23 01	STO 1	a_1	C	C	C	
23	24 07	RCL 7	Σx	a_1	C	C	
24	61	x	$a_1\ \Sigma x$	C	C	C	
25	32	CHS	$-a_1\ \Sigma x$	C	C	C	
26	24 04	RCL 4	Σy	$-a_1\ \Sigma x$	C	C	
27	51	+	$\Sigma y - a_1\ \Sigma x$	C	C	C	
28	24 03	RCL 3	n	$\Sigma y - a_1\ \Sigma x$	C	C	
29	71	÷	a_0	C	C	C	$a_0 = \bar{y} - a_1\ \bar{x}$
30	23 00	STO 0	a_0	C	C	C	
31	74	R/S	a_0	C	C	C	Parar para presentar a_0
32	24 01	RCL 1	a_1	a_0	C	C	
33	74	R/S	a_1	a_0	C	C	Parar para presentar a_1
34	21	x⇄y	a_0	a_1	C	C	
35	22	R↓	a_1	C	C	a_0	
36	61	x	a_1 C	C	a_0	a_0	
37	24 02	RCL 2	Σy^2	a_1 C	C	a_0	
38	24 04	RCL 4	Σy	Σy^2	a_1 C	C	
39	15 02	g x^2	$(\Sigma y)^2$	Σy^2	a_1 C	C	
40	24 03	RCL 3	n	$(\Sigma y)^2$	Σy^2	a_1 C	
41	71	÷	$(\Sigma y)^2/n$	Σy^2	a_1 C	a_1 C	
42	41	–	E	a_1 C	a_1 C	a_1 C	$E = \Sigma y^2 - [(\Sigma y)^2/n]$
43	71	÷	r^2	a_1 C	a_1 C	a_1 C	$r^2 = a_1\ C/E$
44	13 00	GTO 00	r^2	a_1 C	a_1 C	a_1 C	
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTROS
R_0 a_0
R_1 a_1
R_2 Σy^2
R_3 n
R_4 Σy
R_5 Σxy
R_6 Σx^2
R_7 Σx

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG	f	PRGM	
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Ingrese valores x e y	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Calcule consts. de regresión		GTO	08	R/S		a_0*
			R/S				a_1*
5	Calcule el coeficiente						
	de determinación		R/S				r^2
6	Para calcular un valor y						
	proyectado, ingrese el valor x	x	RCL	1	x	RCL	
			0	+			$\hat{y}$
7	Ejecute el paso 6 todas						
	las veces que desee						
8	Para nuevo caso vuelva a 2						
	* La escala no debe						
	perturbarse en estos puntos.						

Ejemplo:

Cierta mañana, en un lugar de los Estados Unidos, un excéntrico profesor de análisis numérico se despierta afiebrado. Para tomarse la temperatura busca un termómetro en su botiquín, pero el que encuentra no está en grados Fahrenheit, que conoce bien, sino en grados centigrados, escala con la que no está familiarizado. Al mirar con desconsuelo por la ventana, ve colgado en el marco un termómetro en grados Fahrenheit para la temperatura ambiente, que naturalmente no le sirve.

El profesor piensa que la relación entre las escalas de los dos termómetros podría ser $F = a_1 C + a_0$. Si además pudiera obtener varios valores pareados para F y C, crearía un programa de regresión lineal para encontrar a_1 y a_0. Luego le sería fácil aplicar la ecuación para convertir la temperatura en grados C a grados F. El profesor decide hacer una prueba y coloca ambos termómetros en agua tibia. A medida que el agua se enfría el profesor va leyendo y anotando las dos temperaturas.

C	40,5	38,6	37,9	36,2	35,1	34,6
F	104,5	102	100	97,5	95,5	94

Si la relación es $F = a_1 C + a_0$, ¿cuáles serán los valores de a_1 y a_0? ¿Cuál es el coeficiente de determinación?

Solución:

f PRGM f REG 40.5 ↑ 104.5 R/S → 1,00
38.6 ↑ 102 R/S → 2,00
37.9 ↑ 100 R/S → 3,00
36.2 ↑ 97.5 R/S → 4,00
35.1 ↑ 95.5 R/S → 5,00
34.6 ↑ 94 R/S → 6,00
GTO 0 8 R/S → 33,53
R/S → 1,76
R/S → 0,99

Según los datos obtenidos, F = 1,76 C + 33,53, con r^2 = 0,99. (Naturalmente, la ecuación verdadera para la conversión de temperatura es F = 1,8°C + 32.)

Supongamos que el profesor se toma la temperatura con el termómetro de grados centigrados y encuentra que tiene 37° C. ¿Debe preocuparse? Veamos:

37 RCL 1 × RCL 0 + → 98,65°F

98,65° Fahrenheit no es una temperatura alarmante.

AJUSTE DE CURVAS EXPONENCIALES

Con este programa se calculan los mínimos cuadrados de n pares de puntos de datos $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n\}$, cuando $y_i > 0$, en el caso de una función exponencial del tipo:

$$y = a\,e^{bx} \qquad (a > 0).$$

Esta misma ecuación se puede expresar en forma lineal:

$$\ln y = \ln a + bx.$$

Este programa se aplica al cálculo de los siguientes parámetros estadísticos:

1. Coeficientes a, b

$$b = \frac{\Sigma x_i \ln y_i - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)(\Sigma \ln y_i)}{\Sigma x_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)^2}$$

$$a = \exp\left[\frac{\Sigma \ln y_i}{n} - b\,\frac{\Sigma x_i}{n}\right]$$

2. Coeficiente de determinación

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma x_i \ln y_i - \frac{1}{n}\,\Sigma x_i\,\Sigma \ln y_i\right]^2}{\left[\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma(\ln y_i)^2 - \frac{(\Sigma \ln y_i)^2}{n}\right]}$$

3. Valor estimado $\hat{y}$ para una x dada

$$\hat{y} = a\,e^{bx}$$

Observación:

n es un entero positivo y $n \neq 1$.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	14 07	f LN
02	31	↑
03	15 02	g x^2
04	23 51 02	STO + 2
05	22	R↓
06	21	x⇄y
07	25	Σ+
08	13 00	GTO 00
09	24 05	RCL 5
10	24 07	RCL 7
11	24 04	RCL 4
12	61	x
13	24 03	RCL 3
14	71	÷
15	41	–
16	24 06	RCL 6
17	24 07	RCL 7
18	15 02	g x^2
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	41	–
22	71	÷
23	23 01	STO 1
24	24 07	RCL 7

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	61	x
26	32	CHS
27	24 04	RCL 4
28	51	+
29	24 03	RCL 3
30	71	÷
31	15 07	g e^x
32	23 00	STO 0
33	74	R/S
34	24 01	RCL 1
35	74	R/S
36	21	x⇄y
37	22	R↓
38	61	x
39	24 02	RCL 2
40	24 04	RCL 4
41	15 02	g x^2
42	24 03	RCL 3
43	71	÷
44	41	–
45	71	÷
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 a
R_1 b
R_2 $\Sigma(\ln y)^2$
R_3 n
R_4 $\Sigma \ln y$
R_5 $\Sigma x \ln y$
R_6 Σx^2
R_7 Σx

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG	f	PRGM	
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Ingrese los valores de x e y	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Calcule las constantes		GTO	09	R/S		a*
			R/S				b*
5	Calcule el coeficiente						
	de determinación		R/S				r^2
6	Para calcular $\hat{y}$ ingrese x	x	RCL	1	x	g	
			e^x	RCL	0	x	$\hat{y}$
7	Ejecute el paso 6 todas						
	las veces que desee						
8	Para nuevo caso vuelva a 2						
	* La escala debe mantenerse						
	en estos puntos.						

Ejemplo:

x_i	,72	1,31	1,95	2,58	3,14
y_i	2,16	1,61	1,16	,85	0,5

Solución:

a = 3,45 b = –0.58

$y = 3{,}45\ e^{-0.58x}$

$r^2 = 0{,}98$

Para $x = 1{,}5$ $\hat{y} = 1.44$

AJUSTE DE UNA CURVA LOGARITMICA

Con este programa se ajusta una curva logarítmica

$$y = a + b \ln x$$

para un grupo de puntos de datos

$$\{(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n\}$$

Donde $x_i > 0$.

Con este programa se calculan los siguientes parámetros estadísticos:

1. Coeficiente de regresión:

$$b = \frac{\Sigma y_i \ln x_i - \frac{1}{n} \Sigma \ln x_i \Sigma y_i}{\Sigma (\ln x_i)^2 - \frac{1}{n} (\Sigma \ln x_i)^2}$$

$$a = \frac{1}{n} (\Sigma y_i - b \Sigma \ln x_i)$$

2. Coeficiente de determinación:

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma y_i \ln x_i - \frac{1}{n} \Sigma \ln x_i \Sigma y_i\right]^2}{\left[\Sigma (\ln x_i)^2 - \frac{1}{n} (\Sigma \ln x_i)^2\right] \left[\Sigma y_i^2 - \frac{1}{n} (\Sigma y_i)^2\right]}$$

3. Valor $\hat{y}$ estimado para una x dada:

$$\hat{y} = a + b \ln x$$

Observación:

n es un entero positivo y $n \neq 1$.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	23 51 02	STO + 2
04	22	R↓
05	21	x⇄y
06	14 07	f LN
07	25	Σ+
08	13 00	GTO 00
09	24 05	RCL 5
10	24 07	RCL 7
11	24 04	RCL 4
12	61	x
13	24 03	RCL 3
14	71	÷
15	41	–
16	24 06	RCL 6
17	24 07	RCL 7
18	15 02	g x^2
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	41	–
22	71	÷
23	23 01	STO 1
24	24 07	RCL 7

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	61	x
26	32	CHS
27	24 04	RCL 4
28	51	+
29	24 03	RCL 3
30	71	÷
31	23 00	STO 0
32	74	R/S
33	24 01	RCL 1
34	74	R/S
35	21	x⇄y
36	22	R↓
37	61	x
38	24 02	RCL 2
39	24 04	RCL 4
40	15 02	g x^2
41	24 03	RCL 3
42	71	÷
43	41	–
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 a
R_1 b
R_2 Σy^2
R_3 n
R_4 Σy
R_5 $\Sigma y \ln x$
R_6 $\Sigma \ln x$
R_7 $\Sigma (\ln x)^2$

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG	f	PRGM	
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Ingrese los valores de x e y	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Calcule las constantes		GTO	09	R/S		a*
			R/S				b*
5	Calcule el coeficiente						
	de determinación		R/S				r^2
6	Para calcular $\hat{y}$, ingrese x	x	f	ln	RCL	1	
			x	RCL	0	+	$\hat{y}$
7	Ejecute el paso 6 todas						
	las veces que desee						
8	Para nuevo caso vuelva a 2						
	* La escala debe mantenerse						
	en estos puntos.						

Ejemplo:

x_i	3	4	6	10	12
y_i	1,5	9,3	23,4	45,8	60,1

Solución:

a = –47,02, b = 41,39

y = –47,02 + 41,39 ln x

r^2 = 0,98

Para x = 8, $\hat{y}$ = 39,06

Para x = 14,5, $\hat{y}$ = 63,67

AJUSTE DE UNA CURVA DE POTENCIAS

Con este programa se ajusta una curva de tipo:

$$y = ax^b \quad (a > 0)$$

a un grupo de puntos de datos

$$\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Donde: $x_i > 0, y_i > 0$.

Si se expresa esta ecuación como:

$$\ln y = b \ln x + \ln a$$

entonces el problema puede resolverse como un problema de regresión lineal.

Los valores estadísticos de salida son:

1. Coeficientes de regresión:

$$b = \frac{\Sigma (\ln x_i)(\ln y_i) - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)(\Sigma \ln y_i)}{n}}{\Sigma (\ln x_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)^2}{n}}$$

$$a = \exp\left[\frac{\Sigma \ln y_i}{n} - b\,\frac{\Sigma \ln x_i}{n}\right]$$

2. Coeficiente de determinación:

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma (\ln x_i)(\ln y_i) - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)(\Sigma \ln y_i)}{n}\right]^2}{\left[\Sigma (\ln x_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma (\ln y_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln y_i)^2}{n}\right]}$$

3. Valor $\hat{y}$ estimado para una x dada

$$\hat{y} = ax^b$$

Observación:

n es un entero positivo y $n \neq 1$.

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	14 07	f LN
02	31	↑
03	15 02	g x^2
04	23 51 02	STO + 2
05	22	R↓
06	21	x⇄y
07	14 07	f LN
08	25	Σ+
09	13 00	GTO 00
10	24 05	RCL 5
11	24 07	RCL 7
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	24 03	RCL 3
15	71	÷
16	41	–
17	24 06	RCL 6
18	24 07	RCL 7
19	15 02	g x^2
20	24 03	RCL 3
21	71	÷
22	41	–
23	71	÷
24	23 01	STO 1

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25	24 07	RCL 7
26	61	x
27	32	CHS
28	24 04	RCL 4
29	51	+
30	24 03	RCL 3
31	71	÷
32	15 07	g e^x
33	23 00	STO 0
34	74	R/S
35	24 01	RCL 1
36	74	R/S
37	21	x⇄y
38	22	R↓
39	61	x
40	24 02	RCL 2
41	24 04	RCL 4
42	15 02	g x^2
43	24 03	RCL 3
44	71	÷
45	41	–
46	71	÷
47	13 00	GTO 00
48		
49		

REGISTROS
R_0 a
R_1 b
R_2 $\Sigma (\ln y)^2$
R_3 n
R_4 $\Sigma \ln y$
R_5 $\Sigma (\ln x)(\ln y)$
R_6 $\Sigma (\ln x)^2$
R_7 $\Sigma \ln x$

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG	f	PRGM	
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Ingrese los valores de x e y	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Calcule las constantes		GTO	10	R/S		a*
			R/S				b*
5	Calcule el coeficiente						
	de determinación		R/S				r^2
6	Ingrese el valor x; calcule $\hat{y}$	x	RCL	1	f	y^x	
			RCL	0	x		$\hat{y}$
7	Efectúe el paso 6 todas						
	las veces que desee						
8	Para nuevo caso vuelva a 2						
	* La escala debe mantenerse						
	en estos puntos.						

Ejemplo:

x_i	10	12	15	17	20	22	25	27	30	32	35
y_i	0.95	1,05	1,25	1,41	1.73	2,00	2,53	2,98	3,85	4,59	6,02

Solución:

$a = ,03,\ b = 1,46$

$y = ,03x^{1,46}$

$r^2 = 0,94$

Para $x = 18, \hat{y} = 1,76$

$x = 23, \hat{y} = 2,52$

COVARIACION Y COEFICIENTE DE CORRELACION

La covariación y el coeficiente de correlación se definen en la siguiente forma, $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n\}$, para un grupo determinado de puntos de datos:

$$\text{Covariación:} s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\ \Sigma x_i \Sigma y_i\right)$$

$$\text{or } s_{xy}' = \frac{1}{n}\left(\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\ \Sigma x_i \Sigma y_i\right)$$

$$\text{Coeficiente de correlación: } r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Donde s_x y s_y son desviaciones típicas ;

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}{n-1}} \qquad s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2/n}{n-1}}$$

Observación:

$-1 \leqslant r \leqslant 1$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00			25	71	÷
01	31	↑	26	74	R/S
02	15 02	g x^2	27	14 22	f s
03	23 51 02	STO + 2	28	23 71 01	STO ÷ 1
04	22	R↓	29	24 02	RCL 2
05	21	x⇄y	30	24 04	RCL 4
06	25	Σ+	31	15 02	g x^2
07	13 00	GTO 00	32	24 03	RCL 3
08	24 05	RCL 5	33	71	÷
09	24 04	RCL 4	34	41	–
10	24 07	RCL 7	35	24 00	RCL 0
11	61	x	36	71	÷
12	24 03	RCL 3	37	14 02	f $\sqrt{x}$
13	71	÷	38	23 71 01	STO ÷ 1
14	41	–	39	24 01	RCL 1
15	24 03	RCL 3	40	13 00	GTO 00
16	01	1	41		
17	41	–	42		
18	23 00	STO 0	43		
19	71	÷	44		
20	23 01	STO 1	45		
21	74	R/S	46		
22	24 00	RCL 0	47		
23	61	x	48		
24	24 03	RCL 3	49		

+23

REGISTROS
R_0 n – 1
R_1 Empleado
R_2 Σy^2
R_3 n
R_4 Σy
R_5 Σxy
R_6 Σx^2
R_7 Σx

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	PRGM	f	REG	
3	Ejecute este paso para i = 1,	x_i	↑				
	2, . . . , n	y_i	R/S				i
4	Calcule la covariante S		GTO	08	R/S		s_{xy}
5	Calcule S		R/S				s_{xy}'
6	Calcule coef. de correlación		R/S				r
7	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

x_i	26	30	44	50	62	68	74
y_i	92	85	78	81	54	51	40

Solución:

$s_{xy} = -354{,}14$

$s_{xy}' = -303{,}55$

$r = -0{,}96$

MOMENTOS Y ASIMETRIA

Con este programa se calculan los siguientes parámetros estadísticos para un grupo determinado de puntos de datos $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$:

1er momento $\quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

2o momento $\quad m_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$

3er momento $\quad m_3 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^3 - \frac{3}{n} \bar{x} \Sigma x_i^2 + 2\bar{x}^3$

Coeficiente del momento de asimetría:

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	25	Σ+
04	13 00	GTO 00
05	24 04	RCL 4
06	24 03	RCL 3
07	71	÷
08	23 02	STO 2
09	74	R/S
10	24 07	RCL 7
11	24 03	RCL 3
12	71	÷
13	24 02	RCL 2
14	15 02	g x^2
15	41	–
16	23 01	STO 1
17	74	R/S
18	24 05	RCL 5
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	24 07	RCL 7
22	24 02	RCL 2
23	61	x
24	24 03	RCL 3

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	71	÷
26	03	3
27	61	x
28	41	–
29	24 02	RCL 2
30	31	↑
31	15 02	g x^2
32	61	x
33	02	2
34	61	x
35	51	+
36	23 00	STO 0
37	74	R/S
38	24 00	RCL 0
39	24 01	RCL 1
40	01	1
41	73	·
42	05	5
43	14 03	f y^x
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 m_3
R_1 m_2
R_2 $\bar{x}$
R_3 n
R_4 Σ x
R_5 Σ x^3
R_6 Σ x^4
R_7 Σ x^2

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	PRGM	f	REG	
3	Para i = 1, 2, . . . , n:						
	Ingrese el valor x	x_i	R/S				i
4	Borre los datos erróneos	x_k	↑	g	x^2	f	
			Σ-				
5	Calcule la media		GTO	05	R/S		$\bar{x}$
6	Calcule el segundo y el						
	tercer momento		R/S				m_2
			R/S				m_3
7	Calcule el coeficiente del						
	momento de asimetría		R/S				γ_1
8	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,1	3,5	4,2	6,5	4,1	3,6	5,3	3,7	4,9

Solución

$\bar{x} = 4{,}21$

$m_2 = 1{,}39$

$m_3 = 0{,}39$

$\gamma_1 = 0{,}24$

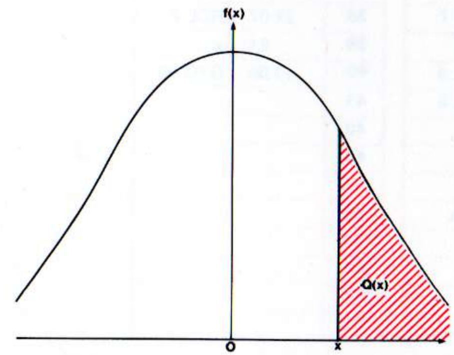
DISTRIBUCION NORMAL

La función de densidad para una variable normal típica se calcula con la siguiente fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Los casos comprendidos en el área señalada del extremo derecho de la curva se determinan mediante la fórmula:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$



Cuando $x \geqslant 0$ se usa una aproximación de polinomio para calcular Q(x):

$$Q(x) = f(x)\,(b_1\, t + b_2\, t^2 + b_3\, t^3 + b_4\, t^4 + b_5\, t^5) + \epsilon(x)$$

Donde: $|\epsilon(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$

$$t = \frac{1}{1 + rx}, \; r = 0{,}2316419$$

$b_1 = {,}31938153,\qquad b_2 = -.356563782$

$b_3 = 1{,}781477937,\qquad b_4 = -1{,}821255978$

$b_5 = 1.330274429$

Observación:

El programa funciona únicamente cuando $x \geqslant 0$. Las ecuaciones $f(-x) = f(x)$, $Q(-x) = 1 - Q(x)$, cuando $x \geqslant 0$, se pueden usar para encontrar f y Q en el caso de valores negativos.

Obra consultada:

Abramowitz y Stegun, *Handbook of Mathematical Functions,* National Bureau of Standards, U.S.A., 1968.

LINEA	CLAVE	INGRESO
00		
01	31	↑
02	23 06	STO 6
03	61	x
04	02	2
05	71	÷
06	32	CHS
07	15 07	g e^x
08	15 73	g π
09	02	2
10	61	x
11	14 02	f $\sqrt{x}$
12	71	÷
13	23 07	STO 7
14	74	R/S
15	24 00	RCL 0
16	24 06	RCL 6
17	61	x
18	01	1
19	51	+
20	15 22	g 1/x
21	31	↑
22	31	↑
23	31	↑
24	24 05	RCL 5

LINEA	CLAVE	INGRESO
25	61	x
26	24 04	RCL 4
27	51	+
28	61	x
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	61	x
32	24 02	RCL 2
33	51	+
34	61	x
35	24 01	RCL 1
36	51	+
37	61	x
38	24 07	RCL 7
39	61	x
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS	
R_0	r
R_1	b_1
R_2	b_2
R_3	b_3
R_4	b_4
R_5	b_5
R_6	x
R_7	f(x)

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	PRGM			
3	Almacene las constantes	r	STO	0			
		b_1	STO	1			
		b_2	STO	2			
		b_3	STO	3			
		b_4	STO	4			
		b_5	STO	5			
4	Ingrese x; calcule f(x)	x	R/S				f(x)
5	Calcule Q(x)		R/S				Q(x)
6	Para un nuevo caso, vuelva a 4.						

Ejemplos:

1. x = 1,18
2. x = 2,28

Soluciones:

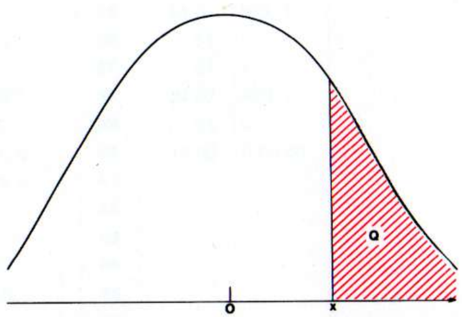
1. f(x) = 0,20
   Q(x) = 0,12
2. f(x) = 0,03
   Q(x) = 0,01

DISTRIBUCION INTEGRAL NORMAL INVERSA

Con este programa se determina el valor de x, de manera que

$$Q = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dt$$

cuando se da Q y $0 < Q \leqslant 0{,}5$.



Se usa la siguiente aproximación racional:

$$x = t - \frac{c_0 + c_1\, t + c_2\, t^2}{1 + d_1\, t + d_2\, t^2 + d_3\, t^3} + \epsilon(Q)$$

si $\quad |\epsilon(Q)| < 4.5 \times 10^{-4}$

$$t = \sqrt{\ln \frac{1}{Q^2}}$$

$c_0 = 2{,}515517 \qquad d_1 = 1{,}432788$

$c_1 = 0{,}802853 \qquad d_2 = 0{,}189269$

$c_2 = 0{,}010328 \qquad d_3 = 0{,}001308$

Obra consultada:

Abramowitz y Stegun, *Handbook of Mathematical Functions,* National Bureau of Standards, U.S.A., 1968.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00			25	51	+
01	31	↑	26	61	x
02	61	x	27	24 00	RCL 0
03	15 22	g 1/x	28	51	+
04	14 07	f LN	29	24 07	RCL 7
05	14 02	f $\sqrt{x}$	30	71	÷
06	23 06	STO 6	31	41	–
07	31	↑	32	13 00	GTO 00
08	31	↑	33		
09	31	↑	34		
10	24 05	RCL 5	35		
11	61	x	36		
12	24 04	RCL 4	37		
13	51	+	38		
14	61	x	39		
15	24 03	RCL 3	40		
16	51	+	41		
17	61	x	42		
18	01	1	43		
19	51	+	44		
20	23 07	STO 7	45		
21	34	CLX	46		
22	24 02	RCL 2	47		
23	61	x	48		
24	24 01	RCL 1	49		

REGISTROS
R_0 c_0
R_1 c_1
R_2 c_2
R_3 d_1
R_4 d_2
R_5 d_3
R_6 t
R_7 $1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3$

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	PRGM			
3	Almacene las constantes	c_0	STO	0			
		c_1	STO	1			
		c_2	STO	2			
		d_1	STO	3			
		d_2	STO	4			
		d_3	STO	5			
4	Ingrese Q	Q	R/S				
5	Para nuevo caso vuelva a 4						

Ejemplos:

1. Q = 0,12
2. Q = 0,05

Soluciones:

1. x = 1,18
2. x = 1,65

FACTORIALES

Con el siguiente programa se calculan factoriales para valores enteros positivos entre 2 y 69.

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(2)\,(1)$$

Observaciones:

1. En el caso de valores elevados de n, el programa tardará algunos segundos en llegar al resultado final y demorará un máximo de 20 segundos para calcular n = 69.

2. El programa no verifica valores ingresados y dará resultados incorrectos para valores de n < 2 o n > 69, así como en el caso de valores no enteros de n.

PANTALLA		INGRESO	PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE		LINEA	CLAVE	
00			25		
01	01	1	26		
02	23 00	STO 0	27		
03	21	x⇄y	28		
04	23 61 00	STO x 0	29		
05	01	1	30		
06	41	–	31		
07	14 61	f x≠y	32		
08	13 05	GTO 05	33		
09	24 00	RCL 0	34		
10	13 00	GTO 00	35		
11			36		
12			37		
13			38		
14			39		
15			40		
16			41		
17			42		
18			43		
19			44		
20			45		
21			46		
22			47		
23			48		
24			49		

REGISTROS
R_0 Empleado
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	PRGM			
3	Ingrese n (2 ≤ n ≤ 69)	n	R/S				n!
4	Para un nuevo n, vuelva a 3						

Ejemplos:

1. 5! = 120,00

2. 10! = 3628800,00

PERMUTACIONES

Se llaman *permutaciones* a las diferentes formas en que se pueden ordenar, en una fila, los elementos de un conjunto dado. Las permutaciones posibles – cada una conteniendo un número n de objetos – que se pueden efectuar con una colección de m objetos distintos, se determina mediante esta fórmula:

$$_mP_n = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

donde m y n son enteros, y $0 \leqslant n \leqslant m$.

Observaciones:

1. $_mP_n$ también puede indicarse con P_n^m , P(m,n) or $(m)_n$.
2. $_mP_0 = 1$, $_mP_1 = m$, $_mP_m = m!$

LINEA	CLAVE	INGRESO
00		
01	24 00	RCL 0
02	24 00	RCL 0
03	24 01	RCL 1
04	15 71	g x=0
05	13 29	GTO 29
06	14 71	f x=y
07	13 31	GTO 31
08	14 51	f x⩾y
09	13 39	GTO 39
10	01	1
11	14 71	f x=y
12	13 41	GTO 41
13	22	R↓
14	41	–
15	01	1
16	51	+
17	61	x
18	14 73	f LASTx
19	24 00	RCL 0
20	01	1
21	41	–
22	14 71	f x=y
23	13 26	GTO 26
24	22	R↓

LINEA	CLAVE	INGRESO
25	13 15	GTO 15
26	22	R↓
27	22	R↓
28	13 00	GTO 00
29	01	1
30	13 00	GTO 00
31	01	1
32	41	–
33	15 71	g x=0
34	13 37	GTO 37
35	23 61 00	STO x 0
36	13 31	GTO 31
37	24 00	RCL 0
38	13 00	GTO 00
39	00	0
40	71	÷
41	22	R↓
42	22	R↓
43	13 00	GTO 00
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 m
R_1 n
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene m, n	m	STO	0			
		n	STO	1			
3	Calcule las permutaciones		f	PRGM	R/S		$_mP_n$
4	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplos:

1. $_{43}P_3 = 74046{,}00$
2. $_{73}P_4 = 26122320{,}00$

COMBINACIONES

Combinación es la selección de uno o más elementos de un conjunto de objetos distintos, independientemente del orden de ubicación. La cantidad de combinaciones posibles, cada una conteniendo un número n de objetos, que se puede efectuar con una colección de m objetos distintos, se determina mediante esta fórmula:

$$_mC_n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

donde m y n son enteros y $0 \leqslant n \leqslant m$.

Con este programa se calcula $_mC_n$ usando el algoritmo siguiente:

1. Si $n \leqslant m - n$

$$_mC_n = \frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{m}{n}.$$

2. Si $n > m - n$, el programa calcula

Observaciones:

1. $_mC_n$, llamado también coeficiente binomial, puede expresarse además como sigue: C_n^m, $C(m,n)$, o $\binom{m}{n}$.
2. $_mC_n = {}_mC_{m-n}$
3. $_mC_0 = {}_mC_m = 1$
4. $_mC_1 = {}_mC_{m-1} = m$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	41	–
02	14 73	f LASTx
03	14 41	f x<y
04	21	x⇄y
05	23 00	STO 0
06	01	1
07	23 01	STO 1
08	51	+
09	23 02	STO 2
10	22	R↓
11	15 71	g x=0
12	13 30	GTO 30
13	01	1
14	24 01	RCL 1
15	51	+
16	23 01	STO 1
17	21	x⇄y
18	14 51	f x≥y
19	13 22	GTO 22
20	24 02	RCL 2
21	13 00	GTO 00
22	22	x⇄y
23	24 00	RCL 0
24	51	+
25	24 01	RCL 1
26	71	÷
27	23 61 02	STO x 2
28	22	R↓
29	13 13	GTO 13
30	01	1
31	13 00	GTO 00
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 máx (n, m – n)
R_1 Empleado
R_2 Empleado
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese m y n	m	↑				
		n	f	PRGM	R/S		$_mC_n$
3	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplos:

1. $_{73}C_4 = 1088430{,}00$
2. $_{43}C_3 = 12341{,}00$

GENERADOR DE NUMEROS AL AZAR

Con este programa se calculan pseudonúmeros al azar u_i distribuidos uniformemente entre los límites:

$$0 \leqslant u_i \leqslant 1$$

Mediante la fórmula siguiente:

$$u_i = \text{Parte fraccionaria de } [(\pi + u_{i-1})^5].$$

El usuario debe especificar el valor inicial de u_0 (el comienzo o base) de la secuencia, de manera que

$$0 \leqslant u_0 \leqslant 1.$$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	15 73	g π
02	24 00	RCL 0
03	51	+
04	05	5
05	14 03	f y^x
06	15 01	g FRAC
07	23 00	STO 0
08	13 00	GTO 00
09		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS	
R_0	u_i
R_1	
R_2	
R_3	
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene indicador	u_0	STO	0	f	PRGM	
3	Genere un número al azar		R/S				u_i
4	Repita el paso 3 todas las veces que desee						
5	Para una nueva secuencia, vuelva a 2.						

Ejemplo:

Encontrar la frecuencia de números generados al azar, desde la base 0,192743568.

Solución:

0,14; 0,76; 0,15; 0,35; 0.62; 0,54; 0,62; 0,91; 0,48; 0,24.....

EVALUACION DE JI CUADRADO (χ^2)

Con este programa se calcula el valor del parámetro estadístico χ^2, que constituye un método útil para comparar resultados experimentales con los dables de esperar con la consideración teórica de una hipótesis. Se emplea la siguiente ecuación:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde: O_i = frecuencia observada
E_i = frecuencia esperada

Con la prueba estadística de χ^2 se mide el grado de concordancia entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas.

Observaciones:

1. La aplicación de esta prueba a un conjunto de datos determinados, puede requerir la combinación de dos o más intervalos de clases (agrupaciones de puntajes), para que cada frecuencia esperada no resulte de un valor demasiado reducido (por ejemplo, no menos de 5).
2. Si las frecuencias esperadas E_i son iguales a un valor E, hay que calcular E anticipadamente como

$$E = \frac{\Sigma O_i}{n}$$

y luego ingresar el valor encontrado en cada paso como la frecuencia esperada E_i.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	00	0
02	23 00	STO 0
03	23 01	STO 1
04	74	R/S
05	23 02	STO 2
06	41	–
07	15 02	g x^2
08	24 02	RCL 2
09	71	÷
10	23 51 01	STO + 1
11	24 00	RCL 0
12	01	1
13	51	+
14	23 00	STO 0
15	13 04	GTO 04
16	23 02	STO 2
17	41	–
18	15 02	g x^2
19	24 02	RCL 2
20	71	÷
21	23 41 01	STO – 1
22	24 00	RCL 0
23	01	1
24	41	–

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	23 00	STO 0
26	13 04	GTO 04
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 n
R_1 χ^2
R_2 E_i
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	PRGM	R/S		0.00
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Ingrese las frecuencias						
	observadas y las esperadas	O_i	↑				
		E_i	R/S				i
4	Borre los datos erróneos	O_k	↑				
		E_k	GTO	16	R/S		
5	Presente χ^2		RCL	1			χ^2
6	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

O_i	8	50	47	56	5	14
E_i	9,6	46,75	51,85	54,4	8,25	9,15

Solución

$\chi^2 = 4{,}84$

PRUEBA t PARA COMPARACION DE MUESTRAS

Dadas dos series paralelas de datos procedentes de dos poblaciones normales con medias μ_1 y μ_2 (desconocidas),

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

calcúlese:

$$D_i = x_i - y_i$$

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$$

$$s_D = \sqrt{\frac{\Sigma D_i^2 - \frac{1}{n} (\Sigma D_i)^2}{n-1}}$$

$$s_{\overline{D}} = \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

En este caso, con la prueba estadística:

$$t = \frac{\overline{D}}{s_{\overline{D}}} ,$$

que dispone de n − 1 grados de libertad (gl) puede comprobarse la hipótesis nula:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 .$$

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	41	–
02	25	Σ+
03	13 00	GTO 00
04	14 22	f s
05	24 03	RCL 3
06	14 02	f $\sqrt{x}$
07	71	÷
08	14 21	f $\bar{x}$
09	21	x⇄y
10	71	÷
11	74	R/S
12	24 03	RCL 3
13	01	1
14	41	–
15	13 00	GTO 00
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1
R_2
R_3 n
R_4 Empleado
R_5 Empleado
R_6 ΣD_i
R_7 ΣD_i^2

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG	f	PRGM	
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Ingrese un par de	x_i	↑				
	observaciones	y_i	R/S				i
4	Borre los datos erróneos	x_k	↑				
		y_k	–	f	Σ–		
5	Calcule t y df		GTO	04	R/S		t
			R/S				df
6	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

x_i	14	17,5	17	17,5	15,4
y_i	17	20,7	21,6	20,9	17,2

Solución:

t = –7,16

gl = 4,00

PRUEBA t PARA DOS MEDIAS ARITMETICAS

Supóngase que $\{x_1, x_2, ..., x_{n_1}\}$ y $\{y_1, y_2, ..., y_{n_2}\}$ son muestras aleatorias independientes procedentes de dos poblaciones normales con medias μ_1 y μ_2 (desconocidas) y con la misma desviación típica σ^2.

Se desea probar la hipótesis nula:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = D$$

en la que D representa un número dado.

Defínase:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n_1 \bar{x}^2 + \Sigma y_i^2 - n_2 \bar{y}^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

Se puede usar esta prueba – que tiene una distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad – para verificar la hipótesis nula H_0.

PANTALLA		INGRESO	PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE		LINEA	CLAVE	
00			25	24 01	RCL 1
01	24 03	RCL 3	26	24 02	RCL 2
02	23 00	STO 0	27	15 02	g x^2
03	24 06	RCL 6	28	24 00	RCL 0
04	23 01	STO 1	29	61	x
05	14 21	f $\bar{x}$	30	41	–
06	23 02	STO 2	31	24 06	RCL 6
07	34	CLX	32	51	+
08	23 03	STO 3	33	14 21	f $\bar{x}$
09	23 06	STO 6	34	15 02	g x^2
10	23 07	STO 7	35	24 03	RCL 3
11	74	R/S	36	61	x
12	31	↑	37	41	–
13	14 21	f $\bar{x}$	38	24 00	RCL 0
14	51	+	39	24 03	RCL 3
15	24 02	RCL 2	40	51	+
16	21	$x \rightleftarrows y$	41	02	2
17	41	–	42	41	–
18	24 00	RCL 0	43	71	÷
19	15 22	g 1/x	44	14 02	f $\sqrt{x}$
20	24 03	RCL 3	45	71	÷
21	15 22	g 1/x	46	13 00	GTO 00
22	51	+	47		
23	14 02	f $\sqrt{x}$	48		
24	71	÷	49		

REGISTROS
R_0 n_1
R_1 Σx^2
R_2 $\bar{x}$
R_3 n_2
R_4 Empleado
R_5 Empleado
R_6 Σy^2
R_7 Σy

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG			
3	Para i = 1, . . . , n_1:						
	Ingrese el valor x	x_i	Σ+				i
4	Fije las variables para y		f	PRGM	R/S		0.00
5	Para i = 1, . . . , n_2:						
	Ingrese el valor y	y_i	Σ+				i
6	Ingrese D y calcule t	D	R/S				t
7	Para encontrar la media de						
	los valores x e y		RCL	2			$\bar{x}$
			f	$\bar{x}$			$\bar{y}$
8	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

x: 79, 84, 108, 114, 120, 103, 122, 120

y: 91, 103, 90, 113, 108, 87, 100, 80, 99, 54

$n_1 = 8$

$n_2 = 10$

$D = 0$ (i.e., $H_0: \mu_1 = \mu_2$)

Solución:

$t = 1{,}73$

$\overline{x} = 106{,}25$

$\overline{y} = 92{,}50$

EJEMPLO DE PRUEBA ESTADISTICA PARA LA MEDIA ARITMETICA

En una población normal $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ con una desviación conocida σ^2, la prueba de la hipótesis nula

$$H_0: \text{media } \mu = \mu_0$$

se basa en la prueba estadística z (que tiene una distribución típica normal)

$$z = \frac{\sqrt{n}\ (\overline{x} - \mu_0)}{\sigma}.$$

Si se desconoce la desviación σ^2, en su lugar se usa:

$$t = \frac{\sqrt{n}\ (\overline{x} - \mu_0)}{s}$$

Esta prueba estadística t tiene la distribución t con $n - 1$ grados de libertad; $\bar{x}$ y s son la media de ejemplo y la desviación típica, respectivamente.

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	14 21	f $\overline{x}$
02	21	$x \rightleftarrows y$
03	41	−
04	24 03	RCL 3
05	14 02	f $\sqrt{x}$
06	61	x
07	23 00	STO 0
08	34	CLX
09	74	R/S
10	24 00	RCL 0
11	14 22	f s
12	71	÷
13	74	R/S
14	24 00	RCL 0
15	21	$x \rightleftarrows y$
16	71	÷
17	13 00	GTO 00
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 $\sqrt{n}\ (\bar{x} - \mu_0)$
R_1
R_2
R_3 n
R_4 Empleado
R_5 Empleado
R_6 Σx
R_7 Σx^2

STEP	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG			
3	Calcule i = 1,..., n:						
	Ingrese el valor	x_i	Σ+				i
4	Ingrese μ_0	μ_0	f	PRGM	R/S		0.00
5	Calcule t		GTO	10	R/S		t
	o						
5	Ingrese σ y calcule z	σ	GTO	14	R/S		z
6	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

Supóngase $\mu_0 = 2$, para la siguiente serie de datos

{2.73; 0.45; 2.52; 1,19; 3,51; 2,75; 1,79; 1,83; 1; 0,87; 1.9; 1,62; 1,74; 1,92; 1,24; 2,68}

Solución:

Prueba estadística t = −,69
ó z = −,57 si $\sigma = 1$

CAPITULO VII TOPOGRAFIA

TRAZADO DE POLIGONALES

Poligonal es una sucesión de segmentos lineales unidos entre sí por relaciones específicas angulares y de longitud. El trazado de poligonales tiene numerosas aplicaciones prácticas en topografía: determinación de límites, trazado de caminos y solución de diversos problemas de construcción. El teodolito y la cadeneta (cinta de acero para medir) son los instrumentos que se usan comúnmente para establecer ángulos y distancias en el trazado de poligonales.

El topógrafo, partiendo de un punto de referencia y orientación conocidos, establece la dirección de una línea midiendo el ángulo o la deflexión creada al dirigir la visual en el sentido del nuevo trazo. Si se mide la dirección y la distancia hasta el término de la línea, se pueden establecer las coordenadas del punto final con respecto al de origen. En seguida se traslada el teodolito al nuevo punto de origen, se toma la línea previa como referencia y se continúa el proceso.

Para ejecutar este programa se ingresa la latitud Norte y la longitud Este del punto de partida, la referencia azimutal y finalmente la dirección y distancia desde cada punto de la poligonal hasta el punto siguiente. La dirección puede ingresarse como una deflexión o como un ángulo a derecha o izquierda. La distancia puede ingresarse como distancia horizontal o como distancia a lo largo de la pendiente con su ángulo zenital.

Ecuaciones:

$$\text{Dist H} = \text{Dist S sen (ang Zn)}$$

$$N_{i+1} = N_i + \text{Dist H} \cos \text{Az}$$

$$E_{i+1} = E_i + \text{Dist H sen Az}$$

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}[(N_2 + N_1)(E_2 - E_1) + (N_3 + N_2)(E_3 - E_2) + \ldots + (N_n + N_1)(E_1 - E_n)]$$

Donde:

N, E son direcciones Norte y Este a partir de un punto
El subíndice i se refiere al punto corriente
El subíndice n se refiere al penúltimo punto
El subíndice numérico se refiere al número de un punto
Az es el azimut de una trayectoria
Dist H es la distancia horizontal
Dist S es la distancia a lo largo de la pendiente
ang Zn es el ángulo zenital

Observaciones:

1. Los cálculos para encontrar un área limitada por una poligonal pueden resultar inexactos si las coordenadas son muy grandes, como sería el caso de las coordenadas del plano de una provincia o estado. En tales casos se puede usar el programa de *área por distancia meridional doble* para calcular exactamente el área una vez que los ángulos y las distancias hayan quedado establecidos con este programa.

2. Todas las entradas y salidas de datos angulares se hacen en términos de grados, minutos y segundos (G.MS).

PANTALLA		INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
LINE	CLAVE						
00							
01	15 00	g →H	Ref Az				Convertir a °dec.
02	01	1	1	Ref Az			
03	08	8	18	Ref Az			
04	00	0	180	Ref Az			
05	51	+	180 + Az				
06	23 00	STO 0	180 + Az				
07	24 01	RCL 1	N_1	180 + Az			
08	23 05	STO 5	N_1	180 + Az			Fije en "N previa"
09	00	0	0	N_1	180 + Az		Aclarar R_3 y R_4 para
10	23 03	STO 3	0	N_1	180 + Az		acumular
11	23 04	STO 4	0	N_1	180 + Az		
12	74	R/S	0	N_1	180 + Az		
13	15 00	g →H	Angle				Convertir a grados dec.
14	01	1	1	Angle			
15	08	8	18	Angle			
16	00	0	180	Angle			
17	51	+	180 + Ang				
18	14 00	f →H.MS	(D.MS)				
19	15 00	g →H	Defl				La desviación comienza
20	24 00	RCL 0	Az	Defl			aquí
21	51	+	Az + Defl				Calcular el nuevo azimut
22	23 00	STO 0	Az_i				
23	14 00	f →H.MS	Az_i				Convertir en G.MS para
24	74	R/S	Az_i				presentación
25	13 29	GTO 29	H Dist				
26	21	x⇄y	Zn Ang	S Dist			
27	14 04	f SIN	sin Zn	S Dist			
28	61	x	H Dist				Dist H = sen Zn (Dist S)
29	23 51 03	STO + 3	H Dist				Acumular Dist H
30	24 00	RCL 0	Az	H Dist			
31	21	x⇄y	H Dist	Az			
32	14 09	f →R	ΔN	ΔE			
33	23 51 01	STO + 1	ΔN	ΔE			ΔN = Dist H (cos Az)
34	21	x⇄y	ΔE	ΔN			
35	23 51 02	STO + 2	ΔE	ΔN			ΔE = Dist H (sen Az)
36	24 05	RCL 5	N_{i-1}	ΔE	ΔN		
37	24 01	RCL 1	N_i	N_{i-1}	ΔE	ΔN	
38	23 05	STO 5	N_i	N_{i-1}	ΔE	ΔN	Actualizar "N previa"
39	51	+	$(N_i + N_{i-1})$	ΔE	ΔN		
40	61	x	ΔA	ΔN			$\Delta A = (N_i + N_{i-1})\,\Delta E$
41	02	2	2	ΔA	ΔN		
42	71	÷	1/2 ΔA	ΔN			
43	23 51 04	STO + 4	1/2 ΔA	ΔN			Acumular superficie
44	24 01	RCL 1	N_i	1/2 ΔA	ΔN		
45	74	R/S	N_i	1/2 ΔA	ΔN		Presentar latitud N
46	24 02	RCL 2	E_i	N_i	1/2 ΔA	ΔN	
47	13 12	GTO 12	E_i	N_i	1/2 ΔA	ΔN	Presentar longitud E
48							
49							

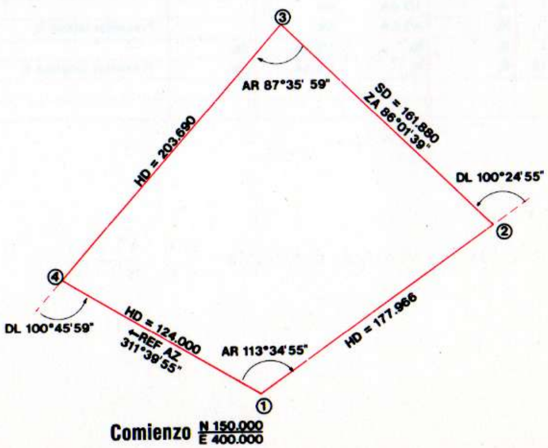
+25

REGISTROS	
R_0	Az
R_1	N actual
R_2	E actual
R_3	Σ Dist H
R_4	Area
R_5	N anterior
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese las coordenadas del						
	punto de partida	N_1	STO	1			
		E_1	STO	2			
3	Ingrese azimut de referencia	Az. ref. G.MS	f	PRGM	R/S		0.00
4a.	Si el ángulo es derecho	Ang D, G.MS	R/S				Az_i, G.MS
4b.	Si el ángulo es izquierdo	Ang I, G.MS	CHS	R/S			Az_i, G.MS
4c.	Si la inclin. es a la derecha	Inc D, G.MS	GTO	19	R/S		Az_i, G.MS
4d.	Si la inclin. es a la izquierda	Inc I, G.MS	CHS	GTO	19	R/S	Az_i, G.MS
5a.	Si la distancia es horizontal	Dist H	R/S				N_i
			R/S				E_i
5b.	Si la distancia es de declive,						
	ingrese el ángulo cenital y	Zn, Ang, G.MS	↑				
	la distancia de declive	Dist S	GTO	26	R/S		N_i
			R/S				E_i
6	Repita los pasos 4 y 5 para						
	las situaciones sucesivas						
7	Presente el total de distancias						
	horizontales poligonales		RCL	3			Σ Dist H
8	Presente la superficie poli-						
	gonal cerrada (ignore la señal)		RCL	4			Area

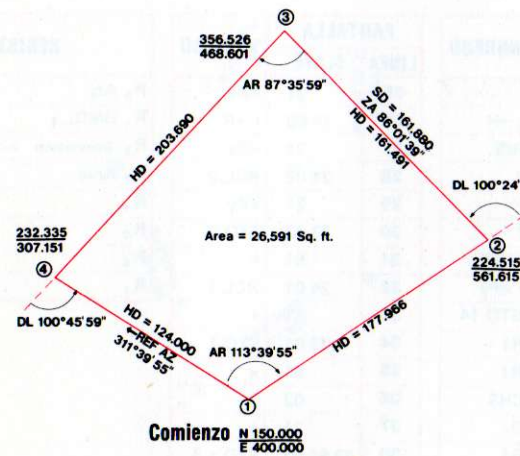
Ejemplo:

El siguiente diagrama muestra las mediciones hechas en el caso de una poligonal que delimita una superficie. Determínense las coordenadas de los puntos 2, 3 y 4, la distancia poligonal horizontal completa y el área de la figura.



Solución:

150 [STO] [1] 400 [STO] [2] 311.3955 [f] [PRGM] [R/S] ⟶ 0.00
113.3455 [R/S] 177.966 [R/S] ⟶ 224,515 (N_2)
[R/S] ⟶ 561,615 (E_2)
100.2455 [CHS] [GTO] [1] [9] [R/S] 86.0139 [↑] 161.880 [GTO] [2] [6] [R/S] ⟶ 356,526 (N_3)
[R/S] ⟶ 468,601 (E_3)
87.3559 [R/S] 203.690 [R/S] ⟶ 232,335 (N_4)
[R/S] ⟶ 307,151 (E_4)
100.4559 [CHS] [GTO] [1] [9] [R/S] 124.0 [R/S] ⟶ 149,903 (N_1)
[R/S] ⟶ 399,784 (E_1)
[RCL] [3] ⟶ 667,144 (ΣH Dist)
[RCL] [4] ⟶ 26590,68 (Area)



Cálculo de las coordenadas finales $\dfrac{N = 149.903}{E = 399.784}$

CALCULO DE AREA POR DISTANCIA MERIDIANA DOBLE

Con este programa se calcula el área de una figura poligonal cerrada, a partir de la posición angular y la longitud de sus lados. Por lo general este procedimiento es más exacto que los métodos de cálculo de área empleando las coordenadas de la figura.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\sum_{i} \text{DMD}_i \times \text{Latitud}_i$$

$$\text{DMD}_i = \text{DMD}_{i-1} + \text{Desviación}_{i-1} + \text{Desviación}_i$$

Donde:

$$\text{Desviación}_i = \text{Dist}_i \operatorname{sen} \text{Az}_i \qquad \text{Latitud}_i = \text{Dist}_i \cos \text{Az}_i$$

Observación:

Los ángulos se ingresan como posición angular y código de cuadrante. Los códigos empleados son: 1 para NE, 2 para SE, 3 para SO y 4 para NO.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	15 00	g →H
02	74	R/S
03	02	2
04	71	÷
05	31	↑
06	14 01	f INT
07	14 61	f x≠y
08	13 14	GTO 14
09	22	R↓
10	22	R↓
11	32	CHS
12	22	R↓
13	22	R↓
14	22	R↓
15	14 01	f INT
16	01	1
17	08	8
18	00	0
19	61	×
20	51	+
21	23 00	STO 0
22	14 00	f →H.MS
23	74	R/S
24	24 00	RCL 0

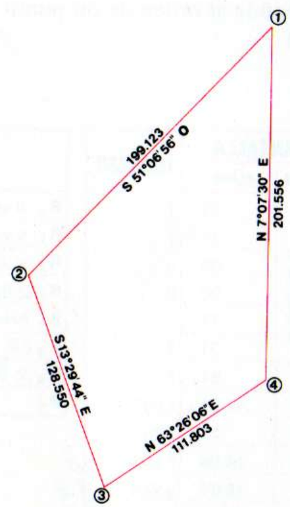
PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	21	x⇄y
26	14 09	f →R
27	21	x⇄y
28	24 02	RCL 2
29	21	x⇄y
30	23 02	STO 2
31	51	+
32	24 01	RCL 1
33	51	+
34	23 01	STO 1
35	61	×
36	02	2
37	71	÷
38	23 51 03	STO + 3
39	24 03	RCL 3
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0 Az_i
R_1 DMD_{i-1}
R_2 Desviación $i-1$
R_3 Area
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Fije las variables iniciales		f	REG	f	PRGM	
3	Ingrese la situación angular	Sit A, G.MS	R/S				Sit A, grad dec
4	Ingrese la clave de cuadrante	Cuad	R/S				Az, G.MS
5	Ingrese la distancia	Dist	R/S				Area
6	Repita los pasos 3, 4, 5 para						
	nuevas situaciones. La super-						
	ficie se presenta después de ingresar la última distancia.						

Ejemplo:

Calcule la superficie de la figura siguiente:



Solución:

Area = 20.937,44 m²

POLIGONAL A PARTIR DE COORDENADAS

En este programa se emplean coordenadas para calcular la distancia y el rumbo entre dos puntos de un polígono. También se calcula el área en metros cuadrados y la sumatoria de las distancias.

$$\text{H Dist} = \sqrt{(N_i - N_{i-1})^2 + (E_i - E_{i-1})^2} \qquad Az = \tan^{-1}\frac{E_i - E_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}$$

$$Area = ½[(N_2 + N_1)(E_2 - E_1) + (N_3 + N_2)(E_3 - E_2) + \ldots (N_n + N_1)(E_1 - E_n)]$$

Donde:
N, E = Dirección Norte y Este a partir de un punto
El subíndice i corresponde al punto corriente
El subíndice n corresponde al penúltimo punto
El subíndice numérico corresponde al orden de un punto determinado
H Dist = Distancia horizontal
Az = Azimut de un rumbo

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	14 33	f REG
02	23 02	STO 2
03	21	x⇄y
04	23 00	STO 0
05	23 01	STO 1
06	74	R/S
07	24 02	RCL 2
08	41	–
09	23 51 02	STO + 2
10	23 05	STO 5
11	21	x⇄y
12	24 01	RCL 1
13	41	–
14	23 51 01	STO + 1
15	15 09	g →P
16	23 51 03	STO + 3
17	74	R/S
18	21	x⇄y
19	15 51	g x⩾0
20	13 25	GTO 25
21	03	3
22	06	6
23	00	0
24	51	+

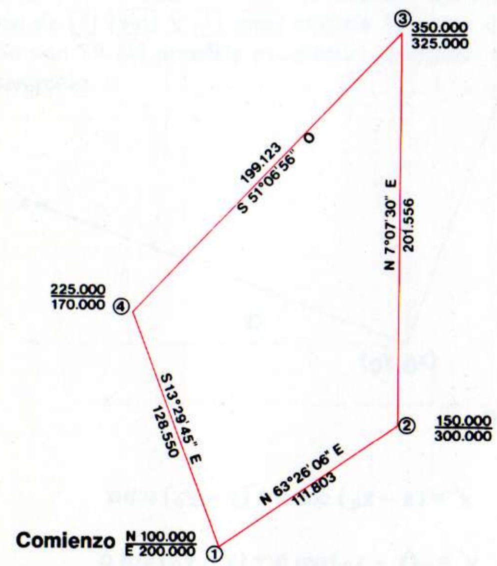
PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	31	↑
26	31	↑
27	09	9
28	00	0
29	71	÷
30	01	1
31	51	+
32	14 01	f INT
33	21	x⇄y
34	14 04	f SIN
35	15 04	g SIN⁻¹
36	15 41	g x<0
37	32	CHS
38	14 00	f →H.MS
39	24 00	RCL 0
40	24 01	RCL 1
41	23 00	STO 0
42	51	+
43	24 05	RCL 5
44	61	x
45	02	2
46	71	÷
47	23 51 04	STO + 4
48	22	R↓
49	13 06	GTO 06

+22

REGISTROS
R_0 N anterior
R_1 N actual
R_2 E actual
R_3 Σ Dist H
R_4 Area
R_5 ΔE
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Ingrese las coordenadas del	N_1	↑				
	punto de partida	E_1	f	PRGM	R/S		
3	Ingrese las coordenadas						
	sigtes. y presente la distancia	N_i	↑				
		E_i	R/S				Dist H
4	Calcule la situación y la clave						
	de cuadrante		R/S				Sit A G.MS
			R↓				Clave cuad
5	Repita los pasos 3 y 4 para						
	las situaciones sucesivas						
6	Presente dist. total inversa		RCL	3			Σ Dist H
7	Presente área comprendida						
	en la figura (ignore el signo)		RCL	4			Area

Ejemplo:



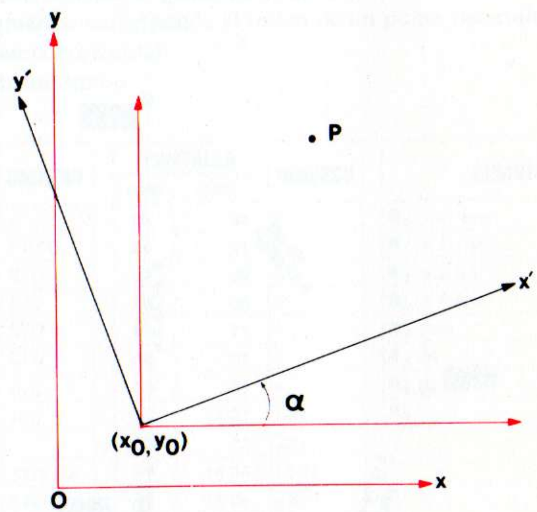
Area = 20.937,44 m²
Distancia total invertida = 641,033

CAPITULO VIII

TRIGONOMETRIA Y GEOMETRIA ANALITICA

TRASLACION Y ROTACION DE COORDENADAS

En algunas ocasiones, como en el caso de cartografía y elaboración de metales, resulta necesario o ventajoso variar el sistema de puntos de referencia. En términos de matemáticas, en estos casos es necesario efectuar una traslación o una rotación del sistema de coordenadas, o bien hacer ambas operaciones. El punto de origen se traslada de (0, 0) a un nuevo punto (x_0, y_0) y en seguida se giran por un ángulo para obtener nuevos ejes, x′, y′. Supongamos que un punto, P, tiene coordenadas (x, y) relativas al tradicional sistema de ejes x e y. En consecuencia, el problema consiste en encontrar las coordenadas de P (x′, y′) con respecto al nuevo sistema cuyos ejes son x′ e y′. Esta situación se ilustra en el siguiente diagrama:



Ecuaciones:

$$x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\operatorname{sen}\alpha$$

$$y' = -(x - x_0)\operatorname{sen}\alpha + (y - y_0)\cos\alpha$$

Observaciones:

1. Este programa sólo puede usarse para resolver problemas separados o combinados de rotación y traslación. Si se trata únicamente de traslación, debe ingresarse un valor de $\alpha = 0$, pero en el caso de rotación será necesario ingresar los valores $x_0 = y_0 = 0$.
2. En la aplicación de este programa se emplea la siguiente convención de signos: α debe ingresarse como número positivo si la rotación es hacia la izquierda o como número negativo si es hacia la derecha.

Comentarios de programación:

Este programa demuestra una aplicación particularmente fuerte de la conversión polar a cartesiana ($\boxed{f}$ $\boxed{\to R}$) combinada con la alta capacidad de la escala operativa de cuatro registros. Los términos $(x - x_0)\cos\alpha$, $(x - x_0)$ sen α, $(y - y_0)\cos\alpha$ e $(y - y_0)$ sen α, son todos generados mediante $\boxed{f}$ $\boxed{\to R}$, almacenándose en la escala hasta que se utilizan. Un programa más directo, haciendo uso de $\boxed{f}$ $\boxed{\sin}$ y $\boxed{f}$ $\boxed{\cos}$ exigiría 30 pasos de programación (en comparación con 19 del presente programa), así como un registro adicional de almacenamiento.

PANTALLA LINEA	CLAVE	INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
00			y	x			
01	23 03	STO 3	y	x			
02	22	R↓	x			y	
03	24 02	RCL 2	α	x			
04	21	x⇄y	x	α			
05	24 00	RCL 0	x_0	x	α		
06	41	–	Δx	α			$\Delta x = x - x_0$
07	14 09	f →R	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$			
08	24 03	RCL 3	y	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$		
09	24 01	RCL 1	y_0	y	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	
10	41	–	Δy	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	$\Delta y = y - y_0$
11	24 02	RCL 2	α	Δy	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	
12	21	x⇄y	Δy	α	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	
13	14 09	f →R	$\Delta y \cos \alpha$	$\Delta y \sin \alpha$	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	
14	22	R↓	$\Delta y \sin \alpha$	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	$\Delta y \cos \alpha$	
15	51	+	x'	$\Delta x \sin \alpha$	$\Delta y \cos \alpha$	$\Delta y \cos \alpha$	$x' = \Delta x \cos \alpha + \Delta y \operatorname{sn} \alpha$
16	74	R/S	x'	$\Delta x \sin \alpha$	$\Delta y \cos \alpha$	$\Delta y \cos \alpha$	
17	22	R↓	$\Delta x \sin \alpha$	$\Delta y \cos \alpha$	$\Delta y \cos \alpha$	x'	
18	41	–	y'	$\Delta y \cos \alpha$	x'	x'	$y' = -\Delta x \operatorname{sn} \alpha + \Delta y \cos \alpha$
19	13 00	GTO 00	y'	$\Delta y \cos \alpha$	x'	x'	
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

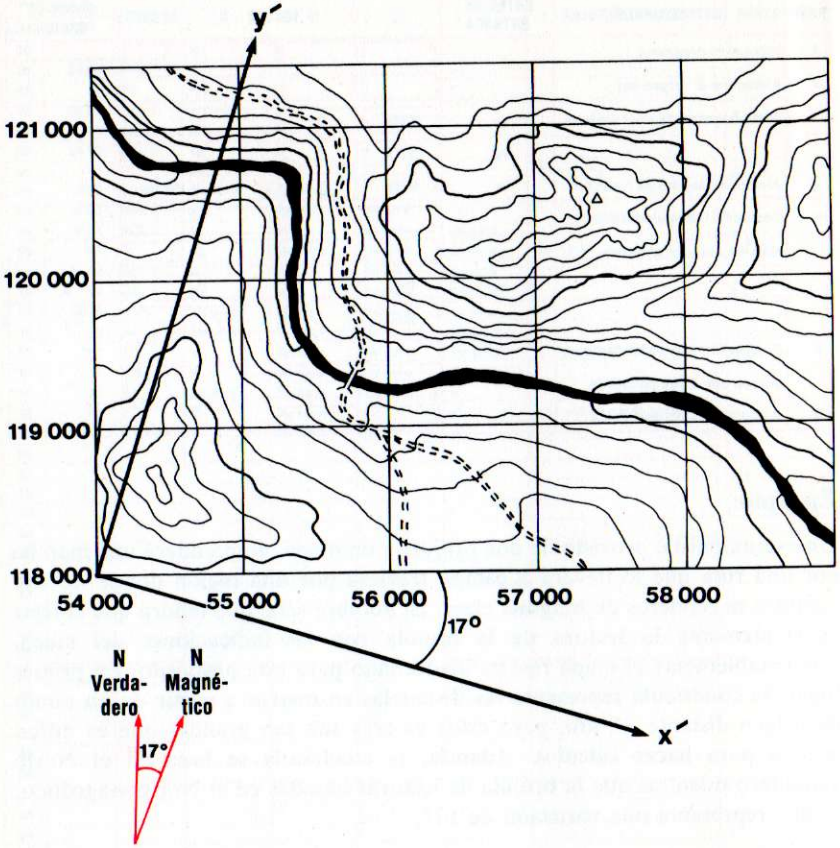
REGISTROS	
R_0	x_0
R_1	y_0
R_2	α
R_3	y
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene el origen del						
	nuevo sistema de coordenadas	x_0	STO	0			
		y_0	STO	1			
3	Almacene ángulo de rotación	α	STO	2	f	PRGM	
4	Convierta las coordenadas del						
	sistema anterior al nuevo	x	↑				
		y	R/S				x'
			R/S				y'
5	Ejecute el paso 4 para tantos						
	puntos como sea necesario						
6	Para nuevo caso vuelva a 2						

Ejemplo:

Un excursionista, provisto de una brújula y un mapa, emprenderá una marcha por una ruta que lo llevará a campo traviesa por una región donde no hay caminos ni senderos de ninguna clase. El hombre sabe que tendrá que cotejar constantemente la lectura de la brújula con las indicaciones del mapa. Lamentablemente el mapa resulta inadecuado para este propósito. En primer lugar, la cuadrícula representa las distancias en metros a partir de un punto de origen distante 25 km, pero estos valores son tan grandes que es difícil usarlos para hacer cálculos. Además, la cuadrícula se basa en el Norte verdadero mientras que la brújula da lecturas basadas en el Norte magnético, lo que representa una variación de 17°.

Antes de salir de casa, el excursionista decide dibujar a grandes rasgos un mapa apropiado, incluyendo un puente y la cima de una montaña que encontrará como puntos de referencia. Coloca su lugar de partida en el punto (54 000, 118 000) de la cuadrícula y gira el eje 17° en sentido positivo, o sea hacia la derecha. Como primer paso quiere encontrar las nuevas coordenadas del puente y la cumbre de la montaña, cuyas coordenadas en el mapa original eran (55 750, 119 300) y (57 450, 120 500) respectivamente.



Solución:

54000 [STO] [0] 118000 [STO] [1] 17 [CHS] [STO] [2] [f] [PRGM]

55750 [↑] 119300 [R/S] ⟶ 1293,45

[R/S] ⟶ 1754,85

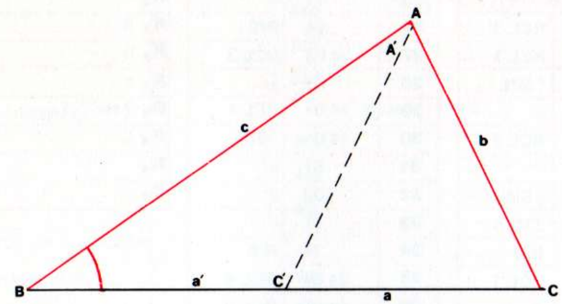
Las nuevas coordenadas del puente son (1293, 1755).

57450 [↑] 120500 [R/S] ⟶ 2568,32

[R/S] ⟶ 3399,44

Las nuevas coordenadas de la cima de la montaña son (2568, 3399).

SOLUCION DE UN TRIANGULO B, b, c



Si se dan dos lados y el ángulo comprendido, con este programa se pueden calcular los parámetros restantes para resolver el triángulo, empleando las siguientes fórmulas:

1. $C = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{c \,\text{sen}\, B}{b}\right)$

2. $A = 2 \,\text{sen}^{-1}\, 1 - (B + C) = \pi \text{ radianes} - (B + C) = 180^\circ - (B + C)$

   200 grados centesimales $- (B + C)$

3. $a = \dfrac{b \,\text{sen}\, A}{\text{sen}\, B}$

Si B es un ángulo agudo ($< 90°$) y $b < c$, existe un segundo conjunto de soluciones que se encuentra con las siguientes fórmulas:

4. $C' = 2 \,\text{sen}^{-1}\, 1 - C$

5. $A' = 2 \,\text{sen}^{-1}\, 1 - (B + C')$

6. $a' = \dfrac{b \,\text{sen}\, A'}{\text{sen}\, B}$

El área se calcula con la fórmula

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\, ac \,\text{sen}\, B$$

Este programa sirve para cualquier modo angular, pero si se emplean grados se supone que se trata de grados decimales.

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	24 03	RCL 3
02	24 01	RCL 1
03	14 04	f SIN
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	71	÷
07	15 04	g SIN^{-1}
08	23 05	STO 5
09	74	R/S
10	24 01	RCL 1
11	51	+
12	01	1
13	15 04	g SIN^{-1}
14	02	2
15	61	x
16	23 04	STO 4
17	21	x⇄y
18	41	−
19	74	R/S
20	14 04	f SIN
21	24 02	RCL 2
22	61	x
23	24 01	RCL 1
24	14 04	f SIN

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25	71	÷
26	74	R/S
27	24 03	RCL 3
28	61	x
29	24 01	RCL 1
30	14 04	f SIN
31	61	x
32	02	2
33	71	÷
34	74	R/S
35	24 04	RCL 4
36	24 05	RCL 5
37	41	−
38	74	R/S
39	13 10	GTO 10
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1 B
R_2 b
R_3 c
R_4 $2\ sen^{-1}\ 1$
R_5 C
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene B, b y c	B	STO	1			
		b	STO	2			
		c	STO	3			
3	Resuelva el triángulo		f	PRGM	R/S		C*
			R/S				A*
			R/S				a*
			R/S				Area
4	Si B < 90° y b < c, encuentre						
	la solución alternativa		R/S				C'*
			R/S				A'*
			R/S				a'*
			R/S				Area'
	* La escala debe mantenerse						
	en estas posiciones.						

Ejemplo:

Si se dan los dos lados siguientes y el ángulo comprendido:

B = 42,3°
b = 25,6
c = 32,8

calcúlese el triángulo.

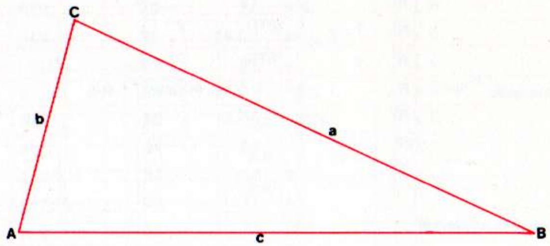
Solución:

Como el ángulo B es menor de 90° y b < c, existen dos conjuntos de soluciones.

C = 59,58°
A = 78,12°
a = 37,22
Area = 410,85

C' = 120,42°
A' = 17,28°
a' = 11,30
Area' = 124,68

SOLUCION DE UN TRIANGULO a, b, c



Si se dan los tres lados de un triángulo, con este programa se pueden calcular los parámetros restantes para determinar el triángulo, empleando las siguientes fórmulas:

$$C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$B = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{b \operatorname{sen} C}{c}\right) \qquad A = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a \operatorname{sen} C}{c}\right)$$

Este programa también sirve para calcular el área, utilizando la siguiente fórmula:

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{donde } s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

En caso necesario se cambia la designación de las letras a fin de que el lado c sea el mayor. El programa sirve para cualquier modo angular, pero si se usan grados se supone que se trata de grados decimales.

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	24 01	RCL 1
02	24 02	RCL 2
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	24 03	RCL 3
06	15 02	g x^2
07	41	–
08	24 01	RCL 1
09	24 02	RCL 2
10	61	x
11	02	2
12	61	x
13	71	÷
14	15 05	g COS^{-1}
15	74	R/S
16	14 04	f SIN
17	24 03	RCL 3
18	71	÷
19	23 00	STO 0
20	24 02	RCL 2
21	61	x
22	15 04	g SIN^{-1}
23	74	R/S
24	24 00	RCL 0

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25	24 01	RCL 1
26	61	x
27	15 05	g SIN^{-1}
28	74	R/S
29	24 01	RCL 1
30	24 02	RCL 2
31	51	+
32	24 03	RCL 3
33	51	+
34	02	2
35	71	÷
36	31	↑
37	23 00	STO 0
38	24 01	RCL 1
39	41	–
40	61	x
41	24 00	RCL 0
42	24 02	RCL 2
43	41	–
44	61	x
45	24 00	RCL 0
46	24 03	RCL 3
47	41	–
48	61	x
49	14 02	f $\sqrt{x}$

REGISTROS
R_0 Empleado
R_1 a
R_2 b
R_3 c
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene los lados (c es	a	STO	1			
	el más largo)	b	STO	2			
		c	STO	3			
3	Resuelva el triángulo		f	PRGM	R/S		C*
			R/S				B*
			R/S				A
			R/S				Area
4	Si sólo se necesita la	a	STO	1			
	superficie (área):	b	STO	2			
		c	STO	3			
			GTO	29	R/S		Area
	* La escala debe mantenerse						
	en estos puntos.						

Ejemplo:

Si $a = 5{,}43$, $b = 10{,}46$, $c = 14{,}87$

Solución:

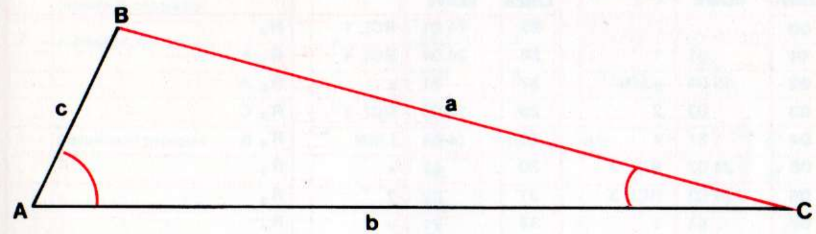
$C = 136{,}37°$

$B = 29{,}04°$

$A = 14{,}59°$

Area = 19,60

SOLUCION DE UN TRIANGULO a, A, C



Si se conocen dos ángulos y un lado opuesto de un triángulo, con este programa se pueden calcular los parámetros restantes, usando las siguientes fórmulas:

$$B = 2\,\mathrm{sen}^{-1}\ 1 - (A + C) = \pi \text{ radianes} - (A + C) = 180° - (A + C)$$
$$= 200 \text{ grados centesimales } - (A + C)$$

$$b = \frac{a \,\mathrm{sen}\, B}{\mathrm{sen}\, A}$$

$$c = \frac{a \,\mathrm{sen}\, C}{\mathrm{sen}\, A}$$

El área se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ ab\,\mathrm{sen}\, C$$

Este programa sirve para cualquier modo angular, pero si se usan grados se supone que se trata de grados decimales.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00			25	24 01	RCL 1
01	01	1	26	24 04	RCL 4
02	15 04	g SIN^{-1}	27	61	x
03	02	2	28	24 03	RCL 3
04	61	x	29	14 04	f SIN
05	24 02	RCL 2	30	61	x
06	24 03	RCL 3	31	02	2
07	51	+	32	71	÷
08	41	–	33	13 00	GTO 00
09	74	R/S	34		
10	14 04	f SIN	35		
11	24 01	RCL 1	36		
12	61	x	37		
13	24 02	RCL 2	38		
14	14 04	f SIN	39		
15	71	÷	40		
16	23 04	STO 4	41		
17	74	R/S	42		
18	24 01	RCL 1	43		
19	14 73	f LASTx	44		
20	71	÷	45		
21	24 03	RCL 3	46		
22	14 04	f SIN	47		
23	61	x	48		
24	74	R/S	49		

REGISTROS	
R_0	
R_1	a
R_2	A
R_3	C
R_4	b
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene a, A y C	a	STO	1			
		A	STO	2			
		C	STO	3			
3	Resuelva el triángulo		f	PRGM	R/S		B*
			R/S				b*
			R/S				c
			R/S				Area
	* La escala debe mantenerse						
	en estos puntos.						

Ejemplo:

Si a = 19,6, A = 40,25°, C = 61,06°

Solución:

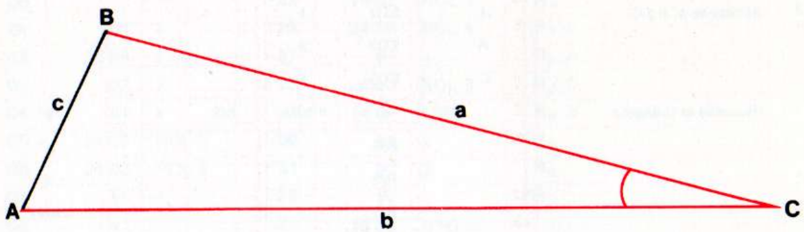
B = 78,69°

b = 29,75

c = 26,55

Area = 255,11

SOLUCION DE UN TRIANGULO a, b, C



Si se dan dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo, con este programa se pueden calcular los parámetros restantes para resolver el triángulo, usando las siguientes fórmulas:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \qquad A = \text{sen}^{-1}\left(\frac{a\,\text{sen}\,C}{c}\right)$$

$$B = 2\,\text{sen}^{-1}\,1 - (A + C) = \pi \text{ radianes} - (A + C) = 180^\circ - (A + C)$$

$$= 200 \text{ grados centesimales} - (A + C)$$

El área se calcula con la fórmula

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\,ab\,\text{sen}\,C$$

Si es necesario se cambian las designaciones para hacer que a sea el menor entre a y b.

Este programa sirve para cualquier modo angular, pero si se emplean grados se supone que se trata de grados decimales.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	24 01	RCL 1
02	24 02	RCL 2
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	24 01	RCL 1
06	24 02	RCL 2
07	61	x
08	02	2
09	61	x
10	24 03	RCL 3
11	14 05	f COS
12	61	x
13	41	–
14	14 02	f $\sqrt{x}$
15	74	R/S
16	24 01	RCL 1
17	24 03	RCL 3
18	14 04	f SIN
19	61	x
20	21	x⇄y
21	71	÷
22	15 04	g SIN^{-1}
23	74	R/S
24	01	1

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	15 04	g SIN^{-1}
26	02	2
27	61	x
28	21	x⇄y
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	41	–
32	74	R/S
33	24 03	RCL 3
34	14 04	f SIN
35	24 01	RCL 1
36	61	x
37	24 02	RCL 2
38	61	x
39	02	2
40	71	÷
41	13 00	GTO 00
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1 a
R_2 b
R_3 C
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene a, b y C (a es						
	menor que a y b)	a	STO	1			
		b	STO	2			
		C	STO	3			
3	Resuelva el triángulo		f	PRGM	R/S		c*
			R/S				A*
			R/S				B
			R/S				Area
4	Si sólo se necesita la	a	STO	1			
	superficie (área):	b	STO	2			
		C	STO	3			
			GTO	33	R/S		Area
	* La escala debe mantenerse						
	en estos puntos.						

Ejemplo:

Si $a = 146, b = 227, C = 31{,}49°$

Solución:

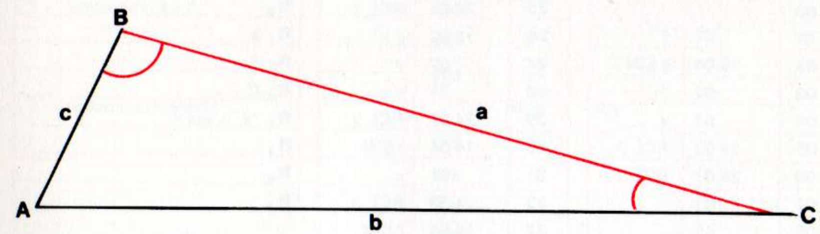
$c = 127{,}76$

$A = 36{,}65°$

$B = 111{,}86°$

Area = 8655,86

SOLUCION DE UN TRIANGULO a, B, C



Si se dan dos ángulos y su lado comprendido, con este programa se pueden calcular los parámetros restantes para resolver el triángulo, empleando las siguientes fórmulas:

$$A = 2\,\mathrm{sen}^{-1}\; 1 - (B + C) = \pi \text{ radianes } - (B + C) = 180° - (B + C)$$

$$= 200 \text{ grados centesimales } - (B + C)$$

$$b = \frac{a \,\mathrm{sen}\, B}{\mathrm{sen}\, A}$$

$$c = \frac{a \,\mathrm{sen}\, C}{\mathrm{sen}\, A}$$

El área se calcula con la fórmula

$$\text{Area} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

Este programa sirve para cualquier modo angular, pero si se usan grados se supone que se trata de grados decimales.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	01	1
02	15 04	g SIN^{-1}
03	02	2
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	24 03	RCL 3
07	51	+
08	41	–
09	23 04	STO 4
10	74	R/S
11	24 01	RCL 1
12	24 04	RCL 4
13	14 04	f SIN
14	71	÷
15	23 04	STO 4
16	24 02	RCL 2
17	14 04	f SIN
18	61	x
19	74	R/S
20	24 04	RCL 4
21	24 03	RCL 3
22	14 04	f SIN
23	61	x
24	74	R/S

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
25	24 01	RCL 1
26	15 02	g x^2
27	02	2
28	71	÷
29	24 02	RCL 2
30	14 04	f SIN
31	61	x
32	24 03	RCL 3
33	14 04	f SIN
34	61	x
35	24 02	RCL 2
36	24 03	RCL 3
37	51	+
38	14 04	f SIN
39	71	÷
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1 a
R_2 B
R_3 C
R_4 A, (a/sen A)
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	Almacene a, B y C	a	STO	1			
		B	STO	2			
		C	STO	3			
3	Resuelva el triángulo		f	PRGM	R/S		A*
			R/S				b*
			R/S				c
			R/S				Area
4	Si sólo se necesita la	a	STO	1			
	superficie (área):	B	STO	2			
		C	STO	3			
			GTO	25	R/S		Area
	* La escala debe mantenerse						
	en estos puntos.						

Ejemplo:

Si a = 20,96, B = 64°32′, C = 35°06′.

Solución:

En primer lugar se convierten B y C a grados decimales.

A = 80,37°

b = 19,19

c = 12,22

Superficie = 115,66

FUNCIONES HIPERBOLICAS

Con este programa se evalúan las seis funciones hiperbólicas mediante las siguientes fórmulas:

1. $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} \qquad (x \neq 0)$

5. $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

6. $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} \qquad (x \neq 0)$

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
00		
01	15 07	g e^x
02	31	↑
03	15 22	g 1/x
04	41	–
05	02	2
06	71	÷
07	13 00	GTO 00
08	15 07	g e^x
09	31	↑
10	15 22	g 1/x
11	51	+
12	13 05	GTO 05
13	15 07	g e^x
14	31	↑
15	15 22	g 1/x
16	41	–
17	31	↑
18	31	↑
19	14 73	f LASTx
20	02	2
21	61	x
22	51	+
23	71	÷
24	13 00	GTO 00

PANTALLA		INGRESO
LINEA	CLAVE	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	senh x	x	f	PRGM	R/S		senh x
	o						
	cosh x	x	GTO	08	R/S		cosh x
	o						
	tanh x	x	GTO	13	R/S		tanh x
	o						
	csch x	x	f	PRGM	R/S		
			g	1/x			csch x
	o						
	sech x	x	GTO	08	R/S		
			g	1/x			sech x
	o						
	coth x	x	GTO	13	R/S		
			g	1/x			coth x

Ejemplos:

1. senh 2,5 = 6,05
2. cosh 3,2 = 12,29
3. tanh 1,9 = 0,96
4. csch 4,6 = 0,02
5. sech (–.25) = 0,97
6. coth (–2,01) = –1,04

FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

Con este programa se evalúan las funciones hiperbólicas inversas mediante las siguientes fórmulas:

1. $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\,[x + (x^2 + 1)^{1/2}]$
2. $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\,[x + (x^2 - 1)^{1/2}] \qquad x \geqslant 1$
3. $\tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \left[\dfrac{1+x}{1-x}\right] \qquad x^2 < 1$
4. $\operatorname{cosech}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1} \left[\dfrac{1}{x}\right] \qquad x \neq 0$
5. $\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \left[\dfrac{1}{x}\right] \qquad 0 < x \leqslant 1$
6. $\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \left[\dfrac{1}{x}\right] \qquad x^2 > 1$

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO
00		
01	31	↑
02	31	↑
03	61	x
04	01	1
05	51	+
06	14 02	f $\sqrt{x}$
07	51	+
08	14 07	f LN
09	13 00	GTO 00
10	31	↑
11	31	↑
12	61	x
13	01	1
14	41	–
15	14 02	f $\sqrt{x}$
16	51	+
17	14 07	f LN
18	13 00	GTO 00
19	31	↑
20	31	↑
21	01	1
22	51	+
23	21	x⇄y
24	32	CHS
25	01	1
26	51	+
27	71	÷
28	14 07	f LN
29	02	2
30	71	÷
31	13 00	GTO 00
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTROS	
R_0	
R_1	
R_2	
R_3	
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA
1	Ingrese el programa						
2	$\operatorname{senh}^{-1} x$	x	f	PRGM	R/S		$\operatorname{senh}^{-1} x$
	o						
	$\cosh^{-1} x$	x	GTO	10	R/S		$\cosh^{-1} x$
	o						
	$\tanh^{-1} x$	x	GTO	19	R/S		$\tanh^{-1} x$
	o						
	$\operatorname{csch}^{-1} x$	x	g	1/x	f	PRGM	
			R/S				$\operatorname{csch}^{-1} x$
	o						
	sech^{-1}	x	g	1/x	GTO	10	
			R/S				$\operatorname{sech}^{-1} x$
	o						
	$\coth^{-1} x$	x	g	1/x	GTO	19	
			R/S				$\coth^{-1} x$

Ejemplo:

1. $\operatorname{sech}^{-1} (2.4) = 1{,}61$
2. $\cosh^{-1} (90) = 5{,}19$
3. $\tanh^{-1} (-.65) = -0{,}78$
4. $\operatorname{csch}^{-1} (2) = 0{,}48$
5. $\operatorname{sech}^{-1} (.4) = 1{,}57$
6. $\coth^{-1} (3.4) = 0{,}30$

INDICE ALFABETICO

Formulario de programación HP-25

Título ______ Hoja No. ___ de ___

Pase el selector al modo de programación (PRGM), pulse f PRGM y en seguida ingrese el programa.

PANTALLA LINEA	PANTALLA CLAVE	INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
00							
01							
02							
03							
04							
05							
06							
07							
47							
48							
49							

REGISTROS

R 0 ___

R 1 ___

R 2 ___

HEWLETT PACKARD

Formulario de programación HP-25

Título ______________________________ Hoja No. ____ de ____

Pase el selector al modo de programación (PRGM), pulse [f] [PRGM] y en seguida ingrese el programa.

PANTALLA		INGRESO	X	Y	Z	T	OBSERVACIONES
LINEA	CLAVE						
00							
01							
02							
03							
04							
05							
06							
07							
08							
09							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

REGISTROS
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

HEWLETT hp PACKARD

Formulario de programación HP-25

Título ______________________________ Hoja No. ____ de ____

Programador ______________________________

PASO	INSTRUCCIONES	DATOS DE ENTRADA	TECLAS				DATOS DE SALIDA

HEWLETT hp PACKARD

Ventas y servicio en 172 oficinas de 65 países
3200 Hillview Avenue • Palo Alto, California 94304, EE. UU.

Para mayores informaciones sírvase dirigirse a la sucursal o a los representantes locales de Hewlett-Packard.

Argentina

Hewlett-Packard Argentina, S.A.C. e I.
Lavalle 1171-3
Buenos Aires

México

Hewlett-Packard Mexicana, S.A. de C.V.
Torres Adalid No. 21, 11° Piso
Colonia del Valle, México 12, D.F.

Venezuela

Hewlett-Packard de Venezuela, C.A.
Apartado Postal 50933, Caracas 105
o Edificio Segre, Tercera Transversal,
Los Ruices Norte, Caracas 107

Otros países de América Latina

Hewlett-Packard Inter-Américas
3200 Hillview Avenue
Palo Alto, California 94304, EE. UU.

España

Hewlett-Packard Española, S.A.
Jerez 3
Madrid 16

Milanesado 21-23
Barcelona 17

Edificio Albia 11, 7° B
Bilbao

Alvaro Bazan, 12, Edificio Luz
Valencia 10

Otros países de Europa

Hewlett-Packard, S.A.
rue du Bois-du-Lan 7
CH-1217 Meyrin 1
Ginebra, Suiza

00025-90014 (Spanish) 6.5K 6/75 **Printed in Singapore**